"Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula"

Luisa Fernanda Abonia Velasco.

William Samir Miranda Rosero.

Trabajo de grado para optar el título de Licenciados en Matemáticas y Física

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

2017

"Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una experiencia en el aula"

Luisa Fernanda Abonia Velasco.

William Samir Miranda Rosero.

Tutora

Mónica Aponte

Cotutora

Ángela María Gómez Vela

Universidad del valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

2017

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

TABLAS

FIGURAS

RESUMEN

La Historia de las Matemáticas y la enseñanza de las matemáticas, revelan una fuerte relación cuando se reconoce que la historia ayuda a entender a las matemáticas como una actividad que forma parte del contexto social y cultural, de manera cambiante de acuerdo a necesidades del momento. Por tal razón, no se pretende recrear la historia en detalle, sino resaltar algunos momentos importantes en la construcción del concepto de razones trigonométricas; por medio de una actividad en el aula, la cual logre fortalecer el aprendizaje de las razones trigonométricas seno y coseno, mediante distintas actividades que le permitan al docente identificar problemáticas como del por qué los alumnos tienen dificultades en resolver tareas que involucren a las razones trigonométricas, y a su vez, como el docente pueda desarrollar herramientas que ayuden a mitigar las diferentes problemáticas encontradas.

Palabras claves

Razones trigonométricas, actividad en el aula, Historia de las Matemáticas, Educación Matemática.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se encuentra inscrito en la línea de investigación ***Didáctica de las Matemáticas*** y la línea ***Historia de las Matemáticas*** del programa Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle. El cual muestra una propuesta didáctica como estrategia pedagógica, donde se plantea una problemática en torno a las razones trigonométricas seno y coseno y la manera que está se presenta en la enseñanza tradicional.

Para el desarrollo de esta investigación se tiene en cuenta antecedes locales, nacionales e internacionales alrededor del desarrollo histórico de las razones trigonométricas; con el objetivo de fortalecer el vínculo entre las razones trigonométricas y algunos elementos de la historia de la misma, por medio de la implementación de actividades y una actividad en el aula a estudiantes de décimo grado que les permitan representar, explicar, razonar y refutar los sucesos y hallazgos en el desarrollo de dichas actividades.

Por consiguiente, se proponen tres capítulos comenzando desde el capítulo cero el cual corresponde a las generalidades del trabajo, como lo es el planteamiento del problema, la justificación los objetivos y los antecedentes. Donde hace referencia a los problemas que presentan los métodos tradicionales de enseñanza para el concepto de razón y la desarticulación entre los conceptos matemáticos y su historia; posterior a ello se manifiesta la importancia de variar esos métodos por medio de nuevas herramientas didácticas.

Al primer capítulo, se le atribuye el desarrollo histórico del concepto de razón, en el cual se hace un recorrido a las civilizaciones más influyentes en la construcción de este concepto y finaliza con el significado de razón para la sociedad actual.

En el segundo capítulo se aluden algunos referentes teóricos donde se identifican varias dimensiones las cuales permiten fundamentar el trabajo: La dimensión didáctica, la dimensión curricular y la presentación de la institución. Donde la primera dimensión corresponde a las teorías de investigación expuestas por Montiel 2005 y 2013 en su tesis doctoral y en sus artículos de investigación respectivamente. Le sigue la dimensión curricular con el fin de refutar las actividades y analizar los desempeños de los estudiantes por medio de los Lineamientos curriculares, los Estándares Básicos de Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje. Por último, se expone la presentación de la institución educativa en donde se realizó el proyecto.

El tercer capítulo corresponde al diseño, la realización y el análisis de la experiencia, donde se tienen presente el concepto matemático, los elementos históricos, curriculares que subyacen en cada actividad y por ultimo las respectivas conclusiones.

CAPÍTULO 0: GENERALIDADES DE LA PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se expone lo correspondiente a la problemática que rodea el objeto de investigación y las pertinentes justificaciones las cuales centran su atención en la importancia de este trabajo de investigación seguido por los objetivos y finalizando con los antecedentes.

0.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Las razones trigonométricas han sido estudiadas por varios autores como Montiel (2005), Rueda (2012), Bravo, Gonzales y Paz (2014) entre otros, pero aun así se podría observar que alrededor de este concepto se presentan muchas problemáticas puesto que no han recibido la suficiente atención, al indicar que gran parte de la literatura en trigonometría se ha enfocado a las funciones trigonométricas.

Una de estas problemáticas en el estudio de las razones trigonométricas se refleja cuando se aplican patrones de enseñanza que necesitan de un proceso memorístico, rutinario y mecánico, sin ningún sentido ni utilidad; de esta manera, algunos los estudiantes no adquieren las habilidades necesarias; por consiguiente, se ven afectados los objetivos de aprendizaje deseados en estos objetos matemáticos, sobre esto San Martin manifiesta que:

> No proporciona el conjunto adecuado de conocimientos, habilidades, capacidades y destrezas, actitudes y valores necesarios para el desenvolvimiento de los educandos y para que estén en condiciones de contribuir, efectivamente, a su propio progreso social y al desarrollo del país. (2003, p.3)

En el aprendizaje de las razones trigonométricas en los estudiantes presentan dificultades cuando no se contextualizan las temáticas tratadas dentro del aula de clase, dejando a estas prácticas como trabajo que solo se puede observar en la escuela y no en el diario vivir, ya que observan representaciones de conceptos inmóviles que no tienen relación con el medio que los rodea, llevando a los estudiantes a no comprender los objetos matemáticos planteados por el docente, dado que existe muy poca investigación en algunos casos por parte de los maestros a la hora de trabajar este tipo de temas observando carencia en cuanto a propuestas novedosas. Para complementar esta idea el Ministerio nacional de educación ahora en adelante MEN afirma:

> El contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar no sólo físico, sino ante todo sociocultural; donde se construye sentido y significado para las actividades con los respectivos contenidos y conceptos matemáticos. Por lo tanto, se establecen conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas. (2006, p. 70)

En la Educación Matemática actual existen diversos recursos y /o herramientas didácticas las cuales favorecen a los estudiantes para la compresión de los conceptos matemáticos, entre ellos se encuentran a las experiencias de aula, las cuales se caracterizan por contener una serie ordenada de actividades relacionadas entre sí, alrededor de un propósito común para la construcción de un concepto específico en este caso matemático. Autores como García, Pimiento, y Tobón aseguran en su libro *Secuencias didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias* que:

> Las secuencias didácticas son, sencillamente, conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos. En la práctica, esto implica mejoras sustanciales de los procesos de formación de los estudiantes, ya que la educación se vuelve menos fragmentada y se enfoca en metas. (2010, p. 20)

En este sentido, se presenta un problema alrededor de algunas experiencias de aula las cuales desarrollan elementos históricos y matemáticos de la trigonometría; dos de estos trabajos son los realizados por Bravo, et al (2014) y Mateus (2013), donde estos realizan una serie de actividades, que muestran articulación entre la Historia y las Matemáticas, pero cada concepto se ve desarrollado por separado; a causa de esto, la Historia solo se ve trabajada por el estudiante en la búsqueda de biografías de los personajes más representativos de la historia de las razones trigonométricas.

En este sentido, se puede inferir que el problema de estas secuencias es la forma fragmentada como se exponen las Matemáticas y su Historia en el desarrollo de sus actividades, puesto que el conocimiento se adquiere a través de la memoria y la repetición, que podría no favorecer una experiencia significativa; en general el docente propone la guía de trabajo y el estudiante mecaniza una serie de pasos para llegar a la solución de las actividades propuestas. Lo que lleva al lector a pensar, que estas actividades fueron realizadas bajo una enseñanza tradicional en donde el docente expone de manera progresiva sus conocimientos y además se basa en la enseñanza y no en el aprendizaje.

Otro problema que se le atribuye a los recursos que se utilizan en el aula de clase, es cuando el maestro solo tiene como referencia el libro de texto y no se percata que los conceptos trabajados tienen un desarrollo histórico, que no es obligatorio que el estudiante deba aprender, pero, si le puede servir al profesor como soporte para el desarrollo de sus competencias, debido a que se dejan de lado apartados de gran importancia que se pueden dar a conocer y de esta manera llevar al estudiante a la reflexión sobre los conocimientos adquiridos. En relación con lo anterior, el libro de texto debe ser una herramienta de apoyo, pero en su utilización aparecen peligros como lo mencionan Arbeláez, Arce, Guacaneme y Sánchez:

> La esclavitud al texto es bien conocida en las aulas escolares desde el señalamiento de lecciones de memoria con marcas de lo que “toca” y de lo que “no toca”, hasta el dictado y copiado en los cuadernos de frases y párrafos tomados al pie de la letra del texto respectivo. (1999, p. 11)

Algunos maestros se apoyan con frecuencia en los libros de texto, ésta herramienta también hace parte del problema; puesto que existen libros que presentan errores en definiciones, ejemplos, causando dificultad al estudiante, ya que el alumno al realizar una consulta en ellos podría recibir una información que no es adecuada, entonces se hace importante la interacción del maestro con los estudiantes para corregir ciertas situaciones de esta manera Arbeláez et al. Sostienen:

> La utilización del texto por parte del alumno tiene también sus peligros, que sin una terapia preventiva por parte del maestro son casi insalvables. La credulidad a lo que dice el texto; el aprendizaje de memoria; la falta de confrontación y extensión de lo que dice el texto con otros textos, con enciclopedias, con libros y personas eruditas; la limitación a las preguntas y ejercicios del libro que van a salir en el examen, hacen que el uso del texto escolar cierre la mente del alumno y fundamentan la desconfianza y la crítica a los textos de que hablamos inicialmente. (1999, p. 11)

De esta manera, la enseñanza tradicional generan dificultades en el aprendizaje por parte de los estudiantes, un caso particular son las razones trigonométricas, que al enseñarse como cociente entre dos magnitudes, apoyándose así, en la construcción en un triángulo rectángulo; dejan de lado teorías y teoremas que han surgido a través de la historia entre los cuales se tienen al Teorema de Pitágoras y Teorema de Tales, que se pueden dar a conocer por parte del docente de lo anterior Anacona (2003) “menciona que la Historia de las Matemáticas ofrece la posibilidad de mostrar los lazos que existen entre las matemáticas como construcción histórica y otras producciones culturales de la humanidad”(p.43). Así mismo Montiel establece que:

> “Las dificultades del estudiante al reconocer que la introducción a la trigonometría a través del estudio del triángulo rectángulo despoja a las razones trigonométricas de todo aquello que le da origen, sentido y significado; es decir, hay una pérdida del proceso geométrico en la construcción de lo trigonométrico”. (2005, p. 27)

Por esta razón, el problema no sólo se manifiesta en la forma que se presentan las razones trigonométricas en el aula de clase o las metodologías usadas por el maestro sino que también se ve reflejado en la formación que tienen los docentes, que los lleva a limitar su trabajo. Por consiguiente se puede evidenciar como “los profesores de matemáticas presentan acusadas carencias formativas en psicología, pedagogía, sociología de la educación, epistemología, historia y Didáctica de las Matemáticas, lo cual implica una desconexión entre su trabajo profesional y las bases y desarrollos teóricos correspondientes” (Rico, 1998. p. 18).

En este orden de ideas, algunas de las problemáticas en torno a la Educación Matemática, tienen relación con las eventualidades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas, por ser estos de naturaleza abstracta. En efecto estas eventualidades al final, involucran directamente a los sujetos encargados del proceso, como lo son el docente, los libros de texto, el diseño de herramientas didácticas innovadoras, entre otros; donde algunas de estas problemáticas se describieron en párrafos anteriores.

En definitiva, esta serie de consideraciones permite plantear el siguiente interrogante de investigación:

¿Cómo a través de una experiencia de aula, que involucra elementos en el desarrollo histórico del concepto de las razones trigonométricas, favorece el aprendizaje del seno y coseno en estudiantes de décimo grado de la educación media en Colombia?

0.2. JUSTIFICACIÓN

En este apartado se quieren resaltar aspectos importantes del por qué el presente trabajo de grado brinda aportes significativos a la Educación Matemática, por un lado uno de los argumentos gira entorno a la necesidad de vincular la Historia de las Matemáticas en el diseño de actividades, experiencias o situaciones en pro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Por otro lado, se busca reconocer los aportes de los estudios en Historia de las Matemáticas sobre cómo se han dado los procesos de construcción de algunos conceptos, teoremas y teorías que se presentan hoy en día alrededor de las matemáticas, que permitan a maestros en ejercicio y en formación a tener una idea más amplia de los conceptos tratados y en este sentido evitar el seguimiento absoluto de un texto escolar sin reflexión alguna. Y como tercer argumento hacer hincapié en la importancia del concepto matemático razones trigonométricas en el ámbito escolar. A continuación se desarrollan algunas ideas para cada razón indicada.

Al involucrar la historia con actividades de aula, el estudiante puede ver reflejada la importancia de los diferentes procesos de construcción por los que ha pasado un objeto matemático, también muestra los diferentes escenarios donde se presentó la necesidad de dar solución a las preguntas planteadas por el ser humano y permite darle significado a los planteamientos teóricos observados dentro del ambiente escolar De lo anterior Anacona menciona:

> Esta clase de estudios ofrece significativos aportes a la Educación Matemática, pues tener un conocimiento sobre los diversos aspectos y conceptos que han incidido en la construcción de una teoría, permite formarse una idea más completa del discurso

> matemático en la que aparecen otros elementos constitutivos de las matemáticas y su actividad, los cuales generalmente se ocultan bajo una presentación acabada y netamente formal. (2003, p. 33).

Igualmente en la traducción del texto "*History in mathematics education the ICMI study"* (Fauvel y Maanen, 2000). Se encuentran enfoques sobre cómo la historia complementa la Educación Matemática, uno de estos es: *Cómo puede estar integrada la historia de las matemáticas en la educación matemática.* La matemática es a menudo como un conjunto de axiomas y pruebas organizadas y presentadas como una estructura deductiva formal, esto supone, al menos implícitamente, que la claridad lógica de una presentación de este tipo puede ser suficiente para la comprensión de las matemáticas. Existen algunas razones para integrar la historia en la Educación Matemática según el texto, entre ellos se encuentran tres complementos que se caracteriza por:

1. Aprendiendo historia, provisionar una información histórica directa.
2. Aprendiendo temas de matemáticas a través del aprendizaje y enseñanza inspirado por la historia.
3. Desarrollando una conciencia más profunda en ambos, matemáticas y en el contexto social y cultural en el que se ha desarrollado las matemáticas.

Se reconoce que los estudios sobre como la Historia de las Matemáticas complementan la Educación Matemática a nivel nacional como internacional son pocos; pero esta propuesta metodológica que busca mediante una experiencia de aula integrar las razones trigonométricas y algunos elementos de su historia, para la construcción de dicho objeto matemático, por medio de actividades en las cuales el docente se presente como orientador y que le puedan permitir al estudiante enriquecer el proceso de aprendizaje y comprender que las matemáticas y la Historia de la misma no se encuentran por separado, sino que se puedan articular para fortalecer los conceptos tratados en un aula de clase. Es importante admitir el papel que juega la historia, para el conocimiento matemático y la construcción de conceptos “desde esta perspectiva, la historia se puede emplear para propiciar un acercamiento distinto al conocimiento matemático. Se pueden convertir los datos de un estudio histórico en actividades de naturaleza lúdica” (Anacona, 2003. p. 42).

Cabe señalar, que la implementación de una experiencia de aula, la cual involucre el desarrollo histórico de un concepto matemático, podría ser un instrumento de trabajo adecuado, gracias a que puede llegar a enriquecer la labor de los docentes quienes están limitados en ocasiones al texto, puesto que “una manera de ver la intervención directa de la Historia en la enseñanza de las matemáticas es a través de la elaboración de actividades didácticas de carácter histórico” (Anacona, 2003. p.38-39). Y esta no solo aplica para los docentes sino que influye directamente a los estudiantes que se benefician con las distintas metodologías que puedan utilizar cuando se aplican actividades didácticas en el aula de clase.

Ahora, para el docente podría resultar relevante la Historia de las Matemáticas en la escogencia de las actividades, porque es en ella donde se pudiesen evidenciar conceptos matemáticos importantes que han servido para el desarrollo de las diferentes teorías, que sirvan de guía en el aula y se logre fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En torno a lo presentado, la Historia de las Matemáticas brindan la posibilidad de encontrar una serie de problemáticas que pueden ser tratadas por el docente; ya que según Anacona:

> La Historia de las Matemáticas ofrece un rico manantial de problemas que pueden ser objeto de un tratamiento lúdico. Distintos momentos y grandes problemas teóricos, que ocuparon un lugar de importancia en la historia, se pueden convertir en actividades de matemáticas recreativas, en las que el juego y todos sus componentes pedagógicos ocupen un lugar central. (2003, p. 42).

Por otro lado, en los Lineamientos Curriculares “en el pensamiento variacional presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente” (MEN, 1998. p. 49). Se considera que puede ser aquí, donde la adaptación de una experiencia de aula muestre importancia, en efecto, se aspirará que los estudiantes logren evidenciar como se construyeron las razones trigonométricas a través de la historia desarrollando una serie de actividades. Según lo anterior, la Historia de las Matemáticas se ven reflejadas en el pensamiento variacional y este da a conocer que inician con las tablas babilónicas y con las fórmulas algebraicas de origen renacentista; a partir de ello, hace indispensable la necesidad de que los conceptos sean tratados de manera rigurosa al igual que los procedimientos y los métodos que esta involucra y de esta forma describir las interrelaciones entre ellos.

Por ultimo en el ámbito escolar toma importancia este trabajo porque para el estudiante el uso de las razones trigonométricas las puede evidenciar en el diario vivir, para ser más exacto en la ingeniería civil se presenta en la toma de medidas, en el diseño de puentes, edificios, etc. En la astronomía al medir distancias de estrellas cercanas, en la navegación desde sus orígenes se ha necesitado del cálculo de distancias cuya medición de forma directa no resulta posible en general el uso de las razones trigonométricas se aplican en todos aquellos casos donde se requiere medidas de precisión.

0.3. OBJETIVOS

0.3.1. Objetivo general

Favorecer el aprendizaje de las razones trigonométricas seno y coseno por medio de una experiencia en el aula que involucre algunos elementos del desarrollo histórico de las razones trigonométricas, dirigido a estudiantes de grado décimo de la educación media en Colombia.

0.3.2. Objetivos específicos

1. Examinar algunos elementos históricos de las razones trigonométricas, en pro de la adaptación e implementación de una experiencia de aula.

2. Adaptar e implementar una experiencia que involucre elementos de la historia sobre las razones seno y coseno para ser llevados al aula de clase.

3. Identificar las fortalezas y las debilidades presentes en los estudiantes de grado decimo al realizar actividades de tipo geométrico e histórico.

4. Reconocer a las razones trigonométricas seno y coseno por medio de la adaptación e implementación .de una experiencia en el aula.

0.4. ANTECEDENTES

El presente proyecto de grado se ha realizado teniendo en cuenta, algunos trabajos que se han desarrollado en torno al vínculo entre los estudios históricos de las razones trigonométricas y su incorporación con las actividades de aula; a los cuales se les realizó un respectivo estudio con la intención de comparar y validar la relación que tienen, con este proyecto.

Estos antecedentes se encontrarán divididos en dos partes donde unos van a caracterizar algunos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas desde la perspectiva que cada autor trabajó en su proyecto de grado y otros, darán cuenta de la articulación en el aula de clase de los estudios históricos, referentes a las razones trigonométricas.

El primero le corresponde a Bravo, M. et al. (2014) en su trabajo de grado titulado: "*Una Secuencias para el aprendizaje de las razones trigonométricas*". El objetivo general, es "Fortalecer el aprendizaje de las funciones trigonométricas a través de secuencias didácticas en los estudiantes de décimo grado (10º), en la Corporación Educativa Adventista".

En la metodología describen la realización de una investigación de tipo cualitativo para encontrar dificultades que se le presentan a los estudiantes en conceptos de geometría, las cuales se lograron visualizar por medio de encuestas, diálogos con estudiantes, diálogos con docentes, y test.

La secuencia didáctica se lleva a cabo con pruebas de apertura realizadas a los estudiantes, las cuales consistían en 10 preguntas de geometría, estas respuestas que se llevaron a diagramas de barras para analizar la información considerando tres ítems: “sabe, no sabe y no responde”.

Al aplicar las actividades programadas por el grupo de trabajo, concluyen que se logró la comprensión y asimilación en la enseñanza de las razones trigonométricas, además que fue enriquecedora porque permitió integrar al grupo. Los autores reconocieron que las Matemáticas para los estudiantes se presenta como una materia difícil de asimilar y que sus debilidades radican en la desatención y desmotivación, de esta manera plantean que el docente debe estar en constante búsqueda de estrategias que le permitan al estudiante la apropiación del objeto matemático y así motivar al mismo explorando su capacidad mental, ayudando a fortalecer los conceptos que traían anteriormente sobre la geometría.

El aporte para nuestro trabajo de grado es a nivel histórico puesto que nos muestran los diferentes momentos por los que pasa la construcción de las razones trigonométricas, a manera de observación pensamos que son muy superficiales en la elaboración del marco histórico, pues dejan de lado momentos importantes en el recorrido de la historia que forman parte de la construcción de las razones trigonométricas.

El segundo le corresponde a Campo y Lasso (2014) en su trabajo de grado titulado: “*Una secuencia didáctica en el paso de las razones trigonométricas a las funciones* *trigonométricas: el caso de la función seno*". Los autores realizaron una secuencia didáctica la cual busca favorecer el paso de las razones trigonométricas a la función trigonométrica en el caso de la función seno, para ello toman algunos elementos pertinentes de la microingeniería didáctica para explicar los fenómenos que ocurren en la intervención de la secuencia. Así mismo, este trabajo consta de dos situaciones donde la primera es una situación problema que aborda el concepto de razón trigonométrica y la segunda situación es la construcción de la función trigonométrica.

En este trabajo como objetivo general fue: "Favorecer en los estudiantes de grado décimo el paso de la razón a función trigonométrica seno a través de una secuencia didáctica mediada por Geogebra" (p. 17). Posterior a ello, tienen tres objetivos específicos donde el primero señala "fundamentar la problemática desde algunos aspectos teóricos como los didácticos, curriculares y matemáticos en pro del diseño de una secuencia didáctica alrededor de las razones y funciones trigonométricas", el segundo pretende "articular los referentes teóricos en el diseño de una secuencia didáctica para favorecer en los estudiantes el pensamiento matemático, particularmente las razones y funciones trigonométricas, en el caso de la función seno" y el tercero gira alrededor de "Movilizar en estudiantes de grado décimo algunos elementos conceptuales como la variación, en el paso de la razón a la función trigonométrica, para el caso de la función seno a través una serie de tareas dentro de la secuencia didáctica propuesta".

De tal forma, para cada uno de ellos, al finalizar el proyecto se obtuvo unas conclusiones relevantes. Por consiguiente para el primer objetivo en una de sus conclusiones llegaron a que "la tecnología en el aula puede ser usada como un catalizador de conocimiento matemático gracias a las múltiples posibilidades de interacción y exploración que pueden existir entre el objeto matemático y el estudiante…" (p.100). Para el segundo objetivo de manera general concluyen resaltando la importancia de su propuesta metodológica, donde muestran la importancia de innovar en situaciones que permitan al estudiante analizar, reflexionar, inferir y conjeturar conceptos trigonométricos, aunque ellos, consideraron que se hace necesario ampliar y profundizar las actividades de las situaciones presentadas y así lograr favorecer el paso de la razón a la función trigonométrica, a fin de, que el diseño de las situaciones permite a los estudiantes reconocer que las variables dependientes e independientes hacen parte fundamental para la aprehensión del concepto de función.

Y por último unas de las conclusiones a la que llegaron en el objetivo final es que "las actividades mostraron cómo pudo emerger en los estudiantes el pensamiento geométrico y variacional por medio de las evidencias escritas por parte de ellos a lo largo de ambas situaciones" (p.102).

La importancia de este trabajo para nosotros resalta en la dimensión matemática, puesto que desde diferentes autores muestran como la trigonometría se puede estudiar de dos maneras diferentes tanto del concepto de función en números reales (función trigonométrica) y desde una perspectiva de funciones de ángulos (razones trigonométricas) como el de razón, y aunque ellos trabajaron sobre el paso de la razón a la función nos deja observar información valiosa sobre las razones trigonométricas que nos servirá para la construcción de nuestro trabajo en nuestro marco histórico.

El tercero le corresponde a Runza, G. (2013) en su trabajo titulado: "*Las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas*". Esta investigación realiza un recorrido histórico de como aparecieron las razones trigonométricas y de qué forma se han utilizado a través del tiempo. Luego analizan aspectos importantes que puedan ayudar a introducir el concepto de razones trigonométricas a un nivel didáctico. Por último diseñan una actividad que permitan vincular los preconceptos al tema en cuestión y al planteamiento y resolución de problemas en diferentes ramas de la ciencia para estudiantes de grado décimo.

En las conclusiones se expone una postura donde el docente está en la necesidad de examinar y complementar cada una de las actividades llevadas al aula de clase teniendo en cuenta su entorno y que le permitan enriquecer cada vez más su propia propuesta. Ahora que dan por terminadas las conclusiones (Runza, 2013) deja como trabajo a futuro la siguiente propuesta: "seguir enriqueciendo la actividad como docente y que le permitan al estudiante sensibilizar su formación teniendo en cuenta tres aspectos: Fundamentación epistemológica e histórica, fundamentación disciplinar y la fundamentación pedagógica" (p. 88).

Los aspectos conceptuales son de suma importancia para nosotros pues la elaboración de ellos nos da unas pautas a seguir para la construcción de nuestro marco histórico en todo lo que tiene que ver con triángulos, clasificación de triángulos, propiedades de los triángulos, líneas de un triángulo, semejanza y congruencia conceptos que se conocer en estos tiempos en la escuela y que nos servirán para dar soporte a nuestro trabajo.

Un cuarto trabajo lo expone (Mateus, 2013) en su proyecto de grado titulado: "*Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo*". Es un documento cuya propuesta se fundamenta desde una perspectiva histórica-epistemológica, didáctica e interdisciplinar de la relación entre la trigonometría y astronomía que pretende potencializar los conceptos matemáticos como razón, ángulo y cuerda a partir de los componentes de la historia que permitan al docente reflexionar sobre los objetos nombrados en cómo nacieron y cómo llegaron a influir en la construcción de las tablas que aparecen en la obra de Claudio Ptolomeo "*El Almagesto*" cuyo como fin es fundamentar la metodología y las herramientas históricas para que sirvan como recursos didácticos en el aula de clases; dentro de las actividades planteadas para los estudiantes aparece la construcción de un *nonio angular* la cual es una herramienta que les sirvió para encontrar la respuesta de que tan alto están las estrellas. Donde dicha medición les deja como conclusión que: "la razón entre la base y la altura de la estrella es la tangente del ángulo" (p. 75).

De manera general, en las conclusiones de este proyecto presentan como esta fue propuesta fue motivadora y significativa en la medida de ver la utilidad de la trigonometría para la astronomía y descubrir conceptos de la trigonometría a partir de actividades entretenidas en el aula.

El componente histórico que este trabajo muestra es vital puesto que se puede notar que se presentan las diferentes etapas de la construcción de los conceptos utilizados en la trigonometría siempre enfocándose en la astronomía que es donde se ve dirigido su trabajo. En el componente conceptual y disciplinar nos da una idea de los conceptos conocidos hoy en la escuela, pero la parte más importante es cuando muestran las actividades, pues en ellas se ve como guían a los estudiantes en los diferentes momentos de la historia y nos deja una enseñanza de lo que se puede hacer cuando se recopila la historia para la realización de actividades en el aula de clase.

Un quinto trabajo le corresponde a (Montalvo, 2012) en su proyecto de grado titulado: "*Historia de la trigonometría y su enseñanza*". Este trabajo presenta la importancia en enseñanza de la trigonometría a través de la historia que ha sido olvidada en los textos escolares, para llegar a esto se basan en libros como "*Trigonometría Plana*", por Nathan O. Niles (1988). Y principalmente en el libro "*Trigometry Delights*" por Ely Maor. (1998) Para lograr la conexión de la historia y la trigonometría tienen en cuenta a John Fauvel (1991). El cual hace mención a algunas razones para usar la historia en la enseñanza de las matemáticas entre las que se encuentran: Ayuda a incrementar la motivación para el aprendizaje además de esto cambia la percepción de los alumnos de las matemáticas.

Para realización de este proyecto el autor tomo la decisión de dividirlo en 14 capítulos en donde tratan recopilación de la historia de la trigonometría, demostraciones de algunas sucesiones trigonométricas y por ultimo dan una sugerencia de algunas actividades para llevar al aula entre lo que se destaca el trabajo al aire libre y ejercicios de la vida cotidiana en donde se puede ver reflejada la utilización de la trigonometría. A modo de conclusión dejan como observación para el docente que el trabajo realizado en el aula no solo puede ser orientado desde el libro de texto sino que se puede diseñar actividades que enriquezcan el proceso del estudiante en cuanto a la enseñanza de las razones trigonométricas.

Las actividades propuestas son de suma importancia para la elaboración de las nuestras en particular la del astrolabio pues en se observa como los estudiantes aprenden a manejar una herramienta que no es común en las clases de trigonometría y que a partir de estas y ayudado de los conceptos ya planteados en una clase pueden calcular distancias o medir diferentes alturas, dando un aporte a que no solo los maestros se pueden guiar del libro de texto sino que se pueden tener actividades donde se evidencien los conceptos vistos en clase.

CAPÍTULO I: ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA TRIGONOMETRÍA.

Desde principio de siglos el hombre ha sentido la necesidad de mejorar y entender su entorno por medio de diversas construcciones las cuales han facilitado su diario vivir, al ser estas las creadoras de grandes pirámides o de ingeniosos sistemas de medidas; es posible inferir que cada una de las civilizaciones existentes, han dejado legados los cuales han ampliado riquezas culturales, económicas, espirituales e intelectuales con el fin de crear nociones que sirvan como un medio para entender nuestro entorno. Por tal razón, en este capítulo se relatarán algunos aspectos históricos entorno a los desarrollos matemáticos más importantes desde la antigüedad hasta las primeras décadas del siglo XVIII y finaliza con las descripciones actuales del concepto matemático a tratar.

1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS.

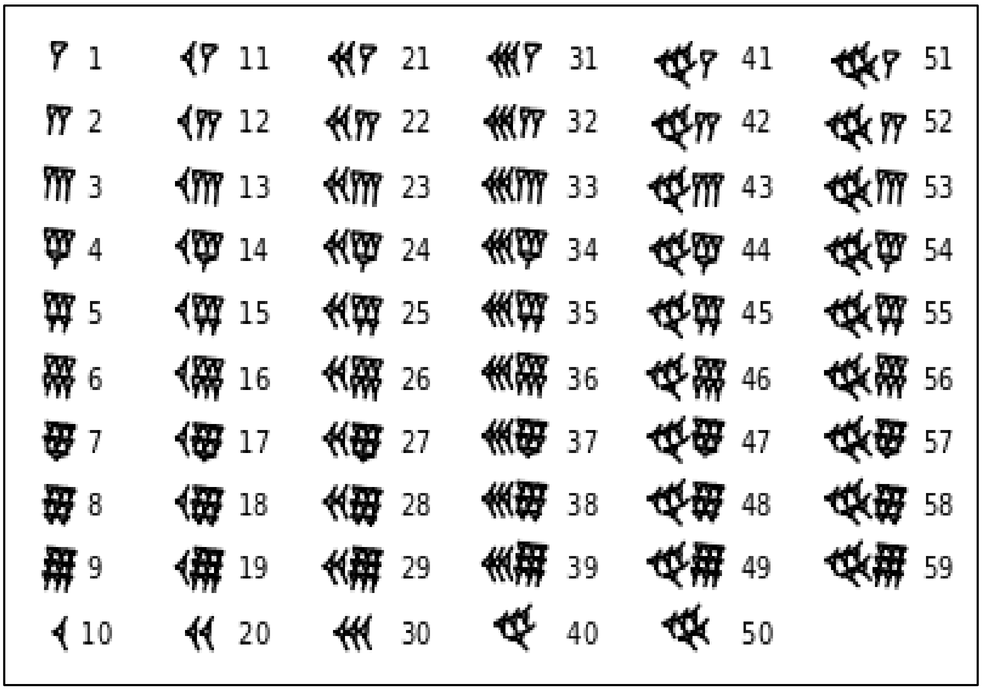
En esta sección se presenta en forma cronológica las diferentes civilizaciones que contribuyeron al desarrollo de la trigonometría comenzando con la civilización babilónica, seguido por la egipcia, la griega, además de ello algunos aportes de la cultura árabe e hindú hasta llegar al renacimiento y culminar con aspectos geométricos y trigonométricos como se conocen actualmente.

1.1.1 La civilización babilónica.

La civilización babilónica la cual engloba un conjunto de pueblos que vivieron en Mesopotamia en un periodo hacia el 5000 a.C. y termina en los primeros tiempos del cristianismo, en Mesopotamia, las primeras formas de escritura aparecen hacia el tercer milenio a. C. y se caracteriza por la utilización de símbolos estilizados para representar las cosas, esta simbología fue utilizada en las tablillas y se conoce como el acadio, que es un tipo de lenguaje y escritura antigua.

Para los babilónicos la aritmética alcanzó su más alto grado de desarrollo durante el periodo acadio los números naturales se escribían de la siguiente manera, tal como se muestra en la figura1.

Figura 1. Representación de los números babilónicos.



Fuente:http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/HistTopics/Babylonian_numerals.html

Al observar la tabla se podría decir que este tipo de representación genera problemas puesto que no se observa el cero, además para la representación de un número mucho mayor la simbología se tendría que repetir, es decir que un símbolo podría ser utilizada para dos números diferentes, haciendo que no sea una buena manera de representar dichas cantidades, para ampliar esta idea Kline afirma:

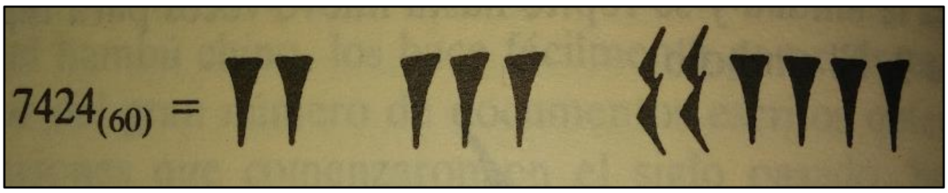
> Al principio los babilónicos no tenían ningún símbolo para representar la ausencia de unidades de orden o posición cualquiera y por lo tanto sus numerales podían resultar ambiguos así por ejemplo,  podía significar 80 o 3620. A menudo se utilizó un espacio vacío más extenso que lo normal para indicar la ausencia de unidades de una posición dada pero evidentemente esto podía ser mal interpretado y resultar confuso (1972, p. 22).

Por otra parte, se observa que manejan un sistema sexagesimal o de base 60 que han sido de gran importancia en la humanidad como por ejemplo para medir el tiempo o también para el trabajo con ángulos, para ampliar con un ejemplo Collette (1985) afirma, que en este el sistema sexagesimal establecido por los babilónicos el número 7424 en base 60 se representa de la siguiente manera:

$$7424_{(60)} = 2,3,44 \; o \; 2 \cdot 60^2 + 3 \cdot 60^1 + 44 \cdot 60^0$$

Es decir, como muestra en la siguiente figura:

Figura 2. Representación numérica en base 60.



Fuente: Collette, J. (1990). *Historia de las matemáticas.* España.: Siglo XXI editores.

Es importante tener en cuenta que los babilónicos utilizaron el principio de notación posicional para representar las fracciones, como asegura Kline (1972): esto constituye sin duda el aspecto más notable y útil de su invención. Así, por ejemplo,  entendido como fracción, representaría $\frac{20}{60}$, y  , como fracción, podría representar $\frac{21}{60}$ o bien $\frac{20}{60} + \frac{1}{60^2}$.

Por otra parte, una de las fuentes más trascendentales que brinda información sobre la civilización babilónica, tanto de la antigua como de la más reciente la constituyen los textos grabados en tablillas de arcilla. Collette (1985) afirma: que en 1945 los señores O. Neugebauer y A. J. Sachs publicaron en el libro *Mathematical cuneiform texts* el contenido de unas de las tablillas en arcilla descubierta, la cual recibe el nombre de tablilla de *Plimpton 322* del catálogo de la colección Plimpton de la Universidad de Columbia. Originalmente la tabilla está escrita en la vieja escritura cuneiforme que data del periodo el 1900- 1600 a.C., la cual consta de tres columnas completas y una parte de la cuarta columna. A continuación en la Figura 3 se ilustra la tablilla original y en la Tabla 1 la reproducción publicada por Neugebauer y Sachs de las cuatro columnas de la tablilla.

Figura 3. Tablilla Plimpton 322.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

A continuación en la siguiente tabla se muestra la reproducción e interpretación realizada de la tablilla.

Tabla 1.Reproducción publicada por Neugebauer y Sachs de las cuatro columnas de la Tablilla Plimpton 322.

IV	**III**	**II**	**I**
[1,59,0]15	1,59	2,49	1
[1,56,56]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1,55,7]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1,]38,33,36,36	9,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

Fuente: Adaptada de Collette, J. (1985). Historia de las matemáticas. España.: Siglo XXI editores (p. 31)

Los números entre corchetes, así como los ceros fueron añadidos por Neugebauer et al, donde se necesitaban en la columna IV. La primera columna enumera las filas. “Las columnas II y III no parecen tener ninguna relación entre sí, pero un análisis más detallado muestra que corresponden a la hipotenusa y a un cateto del triángulo rectángulo” (Collette, 1985. p. 31). Para ser más claro en el siguiente ejemplo se puede evidenciar cual era el proceso para hallar estos valores:

Los datos $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}$ se pueden interpretar como el valor de la hipotenusa y uno de sus catetos respectivamente de un triángulo rectángulo **ABC**. Mateus afirma que:

> Al tomar la fila 10, muestra que ***b*** = 45 y ***c*** = 1,15 que se pueden interpretar bajo los siguientes procedimientos en términos del sistema sexagesimal:
>
> Para ***b*** = 45 se tiene $45 \cdot 60^0 = 45$ entonces ***b*** = 45, para ***c*** = 1,15 se tiene $(1 \cdot 60^1) + (15 \cdot 60^0) = 75$, entonces ***c*** = 75, luego realizando una relación con el teorema de Pitágoras el otro cateto ***a*** se puede expresar como ***a*** = $\sqrt{75^2 - 45^2} = 60$ (2013, p. 9)

Teniendo en cuenta lo anterior se puede crear una nueva columna V con los valores calculados de $\boldsymbol{a}$ de la siguiente forma:

Tabla 2. Tablilla con ternas pitagóricas.

V	III	II	I
a	*b*	*c*	
120	119	169	1
3 456	3 367	4 825	2

4 800	4 601	6 649	3
13 500	12 709	18 541	4
72	65	97	5
360	319	481	6
2 700	2 291	3 541	7
960	799	1 249	8
600	481	769	9
6 480	4 961	8 161	10
60	45	75	11
2 400	1 679	2 929	12
240	161	289	13
2 700	1 771	3 229	14
90	56	106	15

Fuente: Adaptada de Collette, J. (1990). Historia de las matemáticas. España.: Siglo XXI editores (p. 32)

Neugebauer (1945) et al afirma: que si se forma el cociente $\frac{c^2}{a^2}$ (cosecante) se puede obtener los números de la columna IV. Así se puede observar que la tablilla corresponde a una lista de valores de $\frac{c^2}{a^2}$, b y c para ternas pitagóricas. A manera de conclusión se tiene que los valores de a fueron compilados en una parte que falta de la tablilla. Collette afirma:

> Si ahora se toma el cociente $\frac{b}{a}$, se obtiene la línea 1 de la tablilla, el cociente $\frac{119}{120}$ ó $\frac{1,59}{2,0}$, lo que equivale a 0,59,30 o casi al valor 1. Con esto se puede afirmar que el primer triangulo rectángulo está muy cerca de ser un semicuadrado. De manera similar

> se observa en la fila quince, los ángulos del triángulo están próximos a 30° y 60°. Además el decrecimiento regular de los números de la columna IV nos sugiere que las dimensiones angulares de los triángulos varían regularmente entre 45° y 30°. (1985, p. 33)

En resumen, se podría decir que los babilonios llegaron a ser hábiles calculadores y consiguieron resolver un conjunto variado de ecuaciones algebraicas, también aparece el uso de lo que se reconoce en estos días como cosecante, claro está sin que ellos supieran de este nombre, por lo que podríamos decir que ya para estos tiempos se trabajaba sobre el uso de la razón entre los catetos y la hipotenusa, pero Collette (1985) manifestó que no les dio la más mínima preocupación por justificar y probar las reglas utilizadas. Esta civilización utilizó la resolución de estas problemáticas para la excavación y la construcción, así como resultados prácticos para las actividades corrientes dentro de sus necesidades diarias.

Se podría decir que los aportes fuertes o fundamentales de la civilización babilónica en lo que hoy se conoce como trigonometría está en las tablillas de Plimpton en donde se pudo observar anteriormente las diferentes ternas pitagóricas, es decir, manejaban ternas de catetos e hipotenusas de triángulos rectángulos, también fue aplicada por los babilonios en los primeros estudios de astronomía para el cálculo de la posición de cuerpos celestes y la predicción de sus órbitas, en los calendarios y el cálculo del tiempo, y por supuesto en navegación para mejorar la exactitud de la posición y de las rutas.

Los babilonios disponían de tablas donde se podrían encontrar movimientos de cuerpos celestes en donde fácilmente se podían obtener eclipses de Sol y de Luna de lo anterior Kline

(1972) afirma: Los astrónomos podrían predecir las lunas nuevas y los eclipses dentro de un margen de pocos minutos. La astronomía babilónica se da origen a la división del circulo en 360° y no parece tener nada que ver con la base 60 utilizada por ellos, sin embargo, la base 60 si se utilizó para dividir el grado y el minuto en 60 partes Kline (1972) asegura que el astrónomo Ptolomeo (siglo II d.C.) siguió a los babilonios en estas prácticas.

1.1.2 La civilización Egipcia.

Mesopotamia los pueblos que ejercieron dominio sobre ellos cambiaban constantemente por la aparición de nuevas influencias culturales, la civilización egipcia se desarrolló sin verse afectada por influencias extranjeras, esta civilización nació probablemente de un numero de pequeñas civilizaciones que se unieron llamando a esto Alto y Bajo Egipto reinado por *Menes*. Esta civilización realizaba sus escritos en tinta negra o roja sobre papiros, según Kline algunos documentos importantes que han sobrevivido son dos:

i. **El papiro de Moscú (papiro de Golenisheff):** Fue comprado en Egipto en 1893 y conservado en el museo de artes de Moscú, escrito en el año de 1850 a.C. contiene 25 problemas relacionados con la vida práctica.

ii. **El papiro de Rhind**: Descubierto en 1858 por el anticuario escocés A. *Henry Rhind*, ahora conservado en el British Museum y escrito por *Ahmes* hacia el 1650 a.C. Collette (1985) afirma que contiene un conjunto de conocimientos egipcios, para ser exactos 85 problemas redactados en escritura hierática (tipo de escritura de forma cursiva) en la cual se encuentran partes de aritmética, estereometría, geometría, cálculo de pirámides y conjunto de problemas prácticos. Este texto según *Ahmes* es una copia de un texto más antiguo (2000-1800). (1972, p.40).

Estos papiros contienen soluciones de problemas con una incógnita, que son equivalentes a la solución de ecuaciones lineales actuales. Sin embargo, los procesos seguidos eran puramente aritméticos y no constituían, para los egipcios un tema distinto, como podía ser resolución de ecuaciones. Collette afirma que:

> El origen de los 110 problemas contenidos en los papiros de Rhind y de Moscú está estrechamente relacionado con la vida cotidiana y algunos de estos conciernen a reparto de hogazas de panes, granos o animales; otros se refieren a la fermentación del pan y de la cerveza; otros a la comida de los animales y al almacenamiento de los productos alimenticios (1985, p. 56)

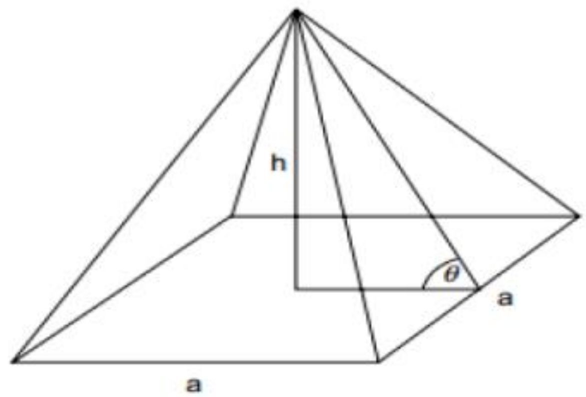
Así mismo, en los papiros se encuentran 26 problemas en torno a la geometría, en los cuales aparecen situaciones de medición para evaluar áreas de figuras planas y ciertos volúmenes. Así mismo, los egipcios parecen acostumbrados a ejercicios que trabajan la semejanza de rectángulos, con ayuda de triángulos isósceles y trapecios isósceles; donde afirma Collette (1985) que también calculaban el volumen de cilindros y prismas.

Maor (citado por Mateus 2013) afirma que, específicamente para la construcción de sus pirámides, los egipcios usaron una especie de trigonometría primitiva, evidente en el desarrollo de algunos problemas prácticos que aparecen en el papiro de *Ahmes*.

Es importante resaltar que esta civilización tenían su propio sistema de medida, ya que utilizaban la mano para medir horizontalmente y el codo para medidas verticales; Collette (1985) Afirma que el codo es una unidad de longitud que vale aproximadamente (20,6 *po)* tiene generalmente 7 manos (2,94 *po*); y cada mano tiene 4 dedos (0,75 *po*) (p. 59). Por ejemplo, para determinar la inclinación de las caras de la pirámide era necesario calcular el valor de la "Seqt", un número que en el lenguaje actual se puede interpretar como la cotangente del ángulo que forma la base de una pirámide con una de sus caras.

El proceso para hallar el valor de la "Seqt" era netamente numérico, haciendo uso del álgebra y de la suma con fracciones unitarias, por lo que se puede deducir que los egipcios no eran conscientes del sentido trigonométrico del problema; en otras palabras, de la existencia de una relación de dependencia entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo en función de un ángulo. A continuación en la Figura 4 se muestra una pirámide de base cuadrada, la cual es un ejemplo para el cálculo de la "Seqt".

Figura 4. Pirámide de base cuadrada en ejemplificación del cálculo de la "Seqt".



Fuente: Mateus (2013) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. . Bogota, D. C. : Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Natules. Universidad Nacional de Colombia (p.10)

En el papiro de Rhind los problemas 56, 57, 58, 59 y 60 se refieren al cálculo de la "Seqt" en el texto de Collette (1985) se muestra una solución al *problema 56*[1] donde este basa en una pirámide cuya altura es de 250 codos y tiene por base 360 codos

Calcula $\frac{1}{2}$ de 360: 180

Divide 180 por 250: $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$ codos.

Pero un codo equivale a 7 manos.

Entonces, multiplica 7 por $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$

1	7
$\frac{1}{2}$	$3+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$	$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{25}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$	$5+\frac{1}{25}$ manos

El resultado es $5+\frac{1}{25}$, este valor coincide con la cotangente del ángulo. La "Seqt" resulto ser importante para los egipcios en las construcciones de pirámides, tal parece que su valor siempre debía ser constante. Afirma Collette (1985) que las "Seqt" calculadas en los papiros de Rhind y Moscú son las cotangentes de los ángulos de la pendiente de las caras de la pirámide donde el valor del ángulo corresponde a 54º 14´.

[1] Para ampliar la solución a este problema visitar Collette (1985, p.60)

Las matemáticas egipcias permanecieron fieles así mismas durante todo el periodo que abarca la civilización egipcia. En todo momento, el conjunto de procedimientos utilizados por los egipcios se concibe, en esencia de manera que respete sus dos principios operacionales; el principio inherente a su capacidad de multiplicar y dividir por dos y su capacidad de calcular los 2/3 de cualquier número, entero o fraccionario. Además el desarrollo y el tratamiento de las fracciones a un nivel alto permiten comprender mejor el arte del cálculo aritmético.

En resumen los aportes mostrados anteriormente por los egipcios son fundamentales para la trigonometría, en el caso de la pirámide de base cuadrada al realizar los cálculos de la Seqt donde se pudo evidenciar la razón trigonométrica cotangente. También hay que mencionar que los egipcios también calcularon la longitud del año solar realizando observaciones a la estrella de Sirio y a partir de esto llegaron a adoptar el calendario civil con un año de 365 días de lo anterior Mateus afirma que:

> Los egipcios adoptaron un calendario con un año de 365 días, dividido en 12 meses de 30 días cada uno, más cinco días extras al final, por lo que el calendario iba retrasándose poco a poco con respecto a las estaciones, y al cabo de 1460 años volvía a la situación inicial, sin embargo, no se tienen evidencias suficientes para afirmar que los egipcios fueran consientes de este hecho (2013, p.10)

Para nuestro trabajo es de gran importancia como los egipcios muestran lo que podríamos definir como una trigonometría rudimentaria basada en triángulos semejantes y que de esta manera llegaron a calcular la pendiente de una superficie plana como fue la Seqt que hoy en día es conocida como la cotangente, y que de una manera nos muestra como el hombre en su continua búsqueda de respuestas a sus inquietudes ha ido evolucionando en los diferentes objetos matemáticos con los que contamos hoy en día.

1.1.3 La civilización Griega.

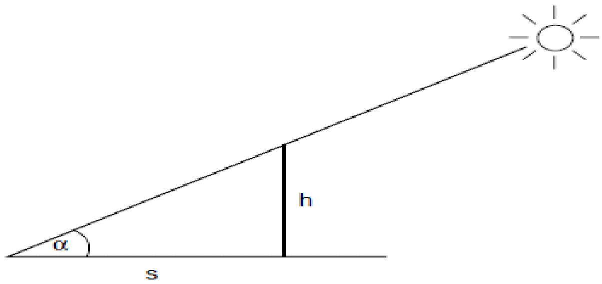
A los griegos en su actividad matemática se les reconoce que la astronomía fue la fuente principal mediante el cual surgieron las primeras ideas de los conceptos trigonométricos un ejemplo de ello consistió en el medir la distancia entre la tierra y la luna, el radio terrestre y su perímetro, entre otras medidas significativas, y para caracterizar ello; a continuación se realizara una breve identificación de los personajes más importantes, que contribuyeron al desarrollo del concepto actual de trigonometría.

Primer matemático griego

Tales de Mileto (624-548 a.C.), estadista, comerciante, ingeniero, astrónomo, filósofo y matemático, es uno de los siete sabios de la antigüedad, las civilizaciones egipcias y babilónicas tuvieron gran influencia sobre Mileto, una ciudad ubicada sobre las costas de Asia.

Uno de los aportes más importantes de Tales en cuanto al concepto de razón de actual y al concepto de ángulo es el cálculo de la altura de las pirámides, comparando su sombra con la de un gnomon (instrumento para calcular la hora a partir de la longitud de la sombra proyectada sobre el piso), de altura conocida y con el uso de triángulos semejantes, conocimiento que pudo ser adquirido en sus constantes viajes a Egipto. En la siguiente Figura se muestra el trabajo hecho por Tales para el cálculo de la altura de pirámides.

Figura 5. Esquema del cálculo de la altura de la pirámide conocida su sombra.



Fuente: Mateus (2013) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. Bogota, D. C: Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Natules. Universidad Nacional de Colombia (p.12)

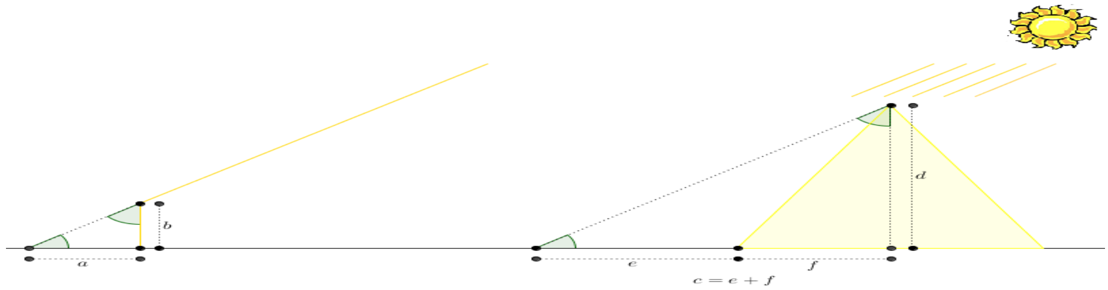
Esta Figura muestra la sombra $\boldsymbol{s}$ de un gnomon de altura $\boldsymbol{h}$ proyectada por la luz del sol. En términos modernos si $\boldsymbol{s}$ es la sombra de $\boldsymbol{h}$ y el sol está a una altitud **α** en grados podemos decir que $\boldsymbol{h = s\, tang\alpha}$ y $\boldsymbol{s = h\, cot\alpha}$**.** Maor (citado por Mateus) afirma:

> Tales no estaba interesado en “descubrir” explícitamente las razones tangente y cotangente como tal, sino en usar el gnomon como un controlador del tiempo, gracias a la medición de la variación diaria de la longitud de la sombra al mediodía podría ser utilizado para determinar las horas del día. Ésta idea proporciona el principio de funcionamiento del reloj de Sol. (2013, p.12)

De esta manera Tales logra calcular la distancia de un buque a la playa, las alturas de las pirámides, de lo anterior Maor (citado por Mateus) afirma:

> Tales de Mileto midió la altura de la pirámide de Guiza mediante la comparación de las sombras proyectadas en el suelo, más la longitud desde el pie de la altura hasta la base de la pirámide, con la sombra proyectada por el gnomon, utilizando las relaciones de semejanza entre triángulos rectángulos. Mostró que la proporción de la sombra del gnomon (***a***) a la de la pirámide (***e***) más la distancia del pie de la altura de la pirámide hasta su base (***f***), era igual a la relación entre la altura del gnomon (***b***) y de la pirámide (***d***) Figura6. (Después, estos métodos simples servirían como una herramienta exitosa para medir las dimensiones de la tierra, y más tarde, la distancia a las estrellas. En la Figura6 podemos observar el cálculo de la altura de la pirámide a través de las sombras proyectadas sobre el suelo. (2013, p. 12)

Figura 6. Ilustración de como Tales de Mileto midió la altura de la pirámide de Guiza mediante la comparación de las sombras proyectadas en el suelo.



Fuente: (Mateus, 2013) Una propuesta parala enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. Bogota, D. C: Tesis deMaestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Natules. Universidad Nacional de Colombia, (p. 13)

El aporte de Tales a la trigonometría esta dado en conceptos geométricos como una primera idea de razones, proporciones y semejanza de triángulos, que encaminaron al origen de lo que hoy conocemos como razones trigonométricas que se desarrollaron en épocas posteriores.

El padre de las matemáticas griegas

Pitágoras de Samos nació en la primera mitad del siglo VI en la isla de Samos próxima a una costa de Asia menor, situada muy cerca a Mileto afirma Collette (1985) tenía unos cincuenta años menos que Tales, y en ocasiones se admite que fue alumno suyo, así como su discípulo Anaximandro.

Actualmente se le atribuye a Pitágoras el famoso teorema que lleva su nombre exactamente la demostración 47 del libro I de Euclides cuyo enunciado es el siguiente: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados" según (Collette 1985) esta relación geométrica está también ligada a la formula pitagórica para encontrar dos números cuadrados cuya suma sea un cuadrado (ternas pitagóricas que eran ya conocidas por los babilonios).

La relación entre ángulo-cuerda-arco en la civilización griega.

Los conocimientos actuales alrededor sobre trigonometría no solo es el trabajo que han realizado los griegos pues como afirma Collette (1985) la trigonometría se remonta a tiempos muy lejanos en la historia de las matemáticas; en efecto los egipcios y los babilónicos estudiaron algunos problemas que implican elementos de la trigonometría.

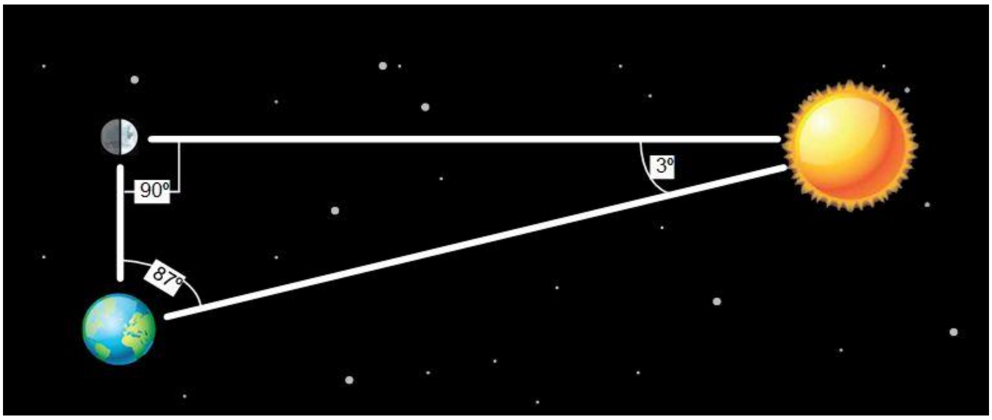
Para conocer algunos de los trabajos de los griegos se muestran las relaciones entre los ángulos o arcos de un círculo y la longitud de sus cuerdas que subtienden. Collette (1985) asegura que las propiedades de las cuerdas como medida de los ángulos inscritos y de los ángulos centrales en los círculos eran conocidas en la época de Hipócrates y parece que Eudoxo utilizó razones y medidas de ángulos en la determinación de las dimensiones de la tierra y de las distancias relativas del sol y de la luna.

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) nacido en la isla de Samos fue el primero en afirmar, adelantándose a Copérnico en 17 siglos que la tierra y los planetas giraban alrededor del Sol. Escribe en una pequeña obra titulada *Sobre las dimensiones y las distancias del Sol y de la Luna.* Él llega a la conclusión que la razón del arco a su cuerda disminuye si el ángulo decrece de 180° a 0°. Para lo que Collette afirma que:

> Aristarco establece algunas razones trigonométricas", así lo asegura Presenta 18 proposiciones entre ellas se encuentra la siguiente "la distancia del Sol a la tierra es más de dieciocho veces pero menos de veinte veces, mayor que la distancia de la luna a la tierra en el lenguaje moderno él encontró *Sen* 3, o más bien $\frac{1}{20} < Sen\ 3 < \frac{1}{18}$. En las proposiciones 11,12 y 13, respectivamente, se obtiene las razones siguientes:
>
> $\frac{1}{6} < Sen\ 1 < \frac{1}{45}$ $\frac{89}{90} < Cos\ 1 < 1$ $\frac{44}{45} < Cos^2 1 < 1$ (1985 p.148).

Afirma Boyer (citado por Mateus 2013) que Aristarco observo que cuando la mitad de la luna estaba iluminada, el ángulo desde la tierra al centro del sol y desde la tierra al centro de la luna es menor que un ángulo recto en 1/30 de cuadrante es decir $\beta = 90 - \alpha$, donde α equivale a 3 grados sexagesimales. Entonces el modelo Tierra Sol y Tierra Luna se podría representar mediante el modelo de un triángulo rectángulo, con la luna como vértice donde se forma un ángulo de 90°, es decir que *Sen3* = TL/TS donde TL es la distancia de la Tierra a la Luna y TS la distancia Tierra Sol. En la siguiente Figurase presenta, un ejemplo de lo anterior.

Figura 7. Representación Tierra Sol y Tierra Luna mediante el modelo de un triángulo rectángulo.



Fuente: http://licenciahistorica.blogspot.com.co/2016/04/hasta-que-altura-volo-icaro.html

A pesar de que Aristarco presenta una buena apreciación sobre las distancias entre estos cuerpos se dice que hubo un error en la apreciación, pues según Boyer (citado por Mateus 2013, p. 16) afirma que esto se debe “al error de observación en el momento de calcular el ángulo β=87°, que en realidad debería de medir 89°50´, por lo que el ángulo α mediría 10´de arco. Si se observa este error el margen es de 2°50´” y parecería pequeño en términos de la relación TL/TS pero al realizar los cálculos se puede observar lo siguiente:

- Si α = 3° entonces *Sen3* = 0,052, donde la relación TL/TS es de $\frac{1}{19}$
- Pero si α = 0° 10´entonces *Sen3*= 0,0029, donde la relación TL/TS es de $\frac{1}{345}$.

Por ende es posible interpretar que con el trabajo realizado por Aristarco surgen las ideas básicas de trigonometría, ya que con este se empieza a ser necesario un estudio de la relación entre cuerdas, arcos y ángulo central en una circunferencia.

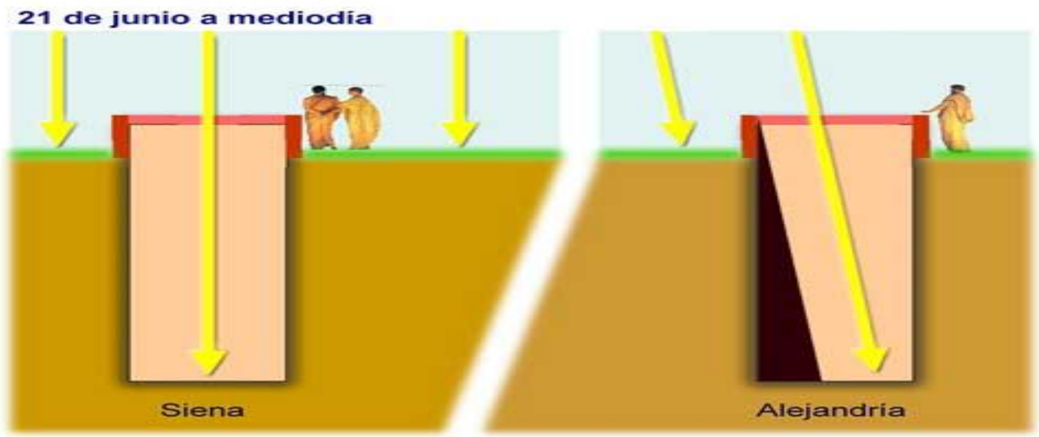
Eratóstenes de Cirene[2] (276-194 a.C.), uno de los primeros en calcular las dimensiones de la tierra, reconocido por la precisión en sus mediciones y por el alto grado de observación. Uno de estos registros lo realizo en su instancia en Siena una ciudad situada al sur de Alejandría, observo que el 21 de Junio (día más largo que la noche puesto que comienza el solsticio de verano para los habitantes del hemisferio norte), al medio día justo cuando el sol se encontraba en el Zenit los objetos en general no producían sombras y solo se proyectaban directamente en un pozo profundo lo que quiere decir que los rayos de sol caían completamente perpendiculares al piso.

Eratóstenes observo que el mismo 21 de junio en su estancia en Alejandría como bibliotecario que no pasa lo mismo, es decir, que al medio día en esta ciudad los objetos si producían sombras por lo que se podría decir que el sol no se encontraba en el Zenit.

[2] Las ideas de Eratóstenes son extraídas del texto (Mateus 2013) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. . Bogotá, D. C.: Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia (p.17-19).

La explicación que dio Eratóstenes a esta diferencia solo podía ser explicada si la tierra no era plana y asumiendo que Siena y Alejandría se encuentran en el mismo meridiano es decir en la misma longitud geográfica y que los rayos del sol caen sobre la tierra de forma paralela entonces, una tierra con superficie curva podría explicar este fenómeno. A continuación en la Figura 8 se muestra la observación registrada por Eratóstenes en Siena y Alejandría el 21 de junio.

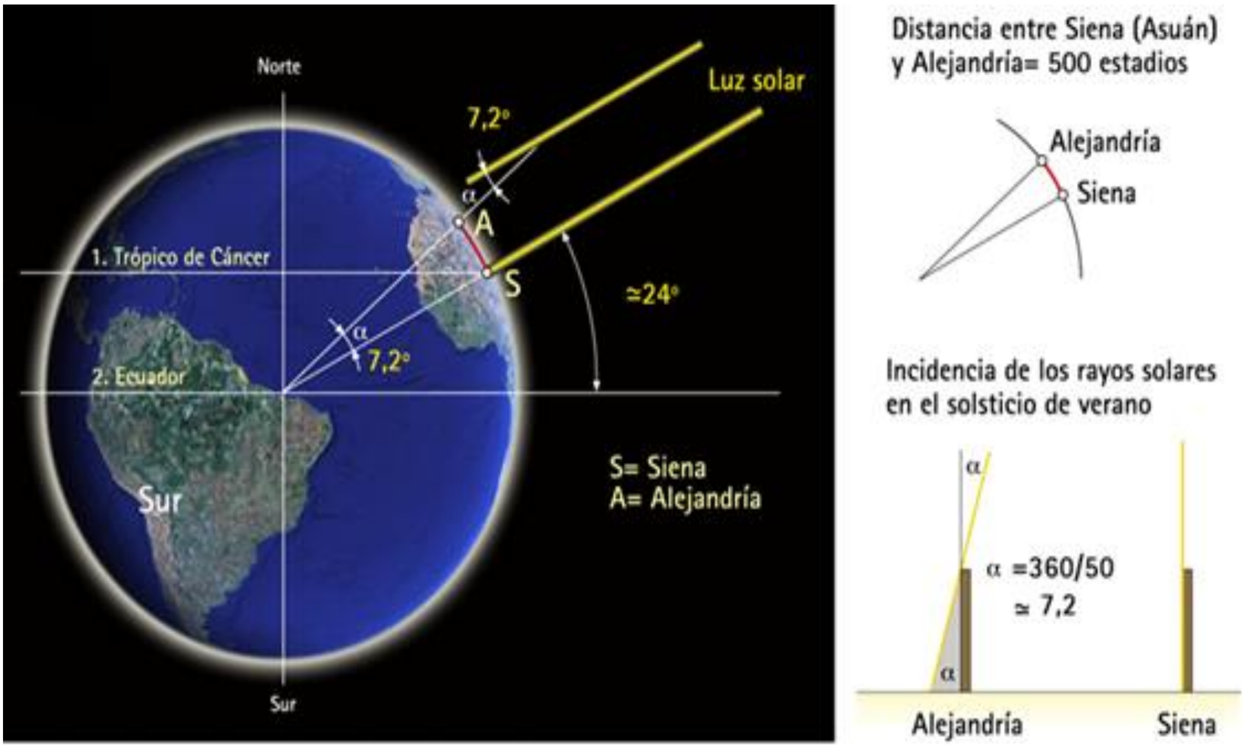
Figura 8. Observación registrada por Eratóstenes en Siena y Alejandría el 21 de junio.



Fuente: http://epilasociales1.blogspot.com.co/2012/10/desde-cuando-la-tierra-es-redonda.html

Dado lo anterior Eratóstenes se dispuso a crear un modelo geométrico en él extiende los rayos de sol hasta el centro de las tierra, los cuales caen paralelamente sobre Siena al medio día, ya que para ese entonces se asume que la tierra es esférica y a su vez los mismos rayos de sol que caen paralelamente en Alejandría, para esto dispuso un gnomon en Alejandría que formaba un ángulo de 7.2° como se observa en la Figura 8. Proyectando el gnomon hasta el centro de la tierra y con ayuda de las propiedades geométricas de la igualdad de ángulos que se forman cuando una recta corta rectas paralelas determino el ángulo formado en el centro de la tierra. Por tanto el ángulo que subtiende un arco de longitud Alejandría hasta Siena, muestra una relación de proporcionalidad con la amplitud del ángulo de 360° que subtiende la longitud de la circunferencia. A continuación se presenta la Figura 9 la cual muestra un esquema de los ángulos formados por los rayos del sol por un pozo en Siena y un gnomon en Alejandría para el 21 de junio.

Figura 9. Ángulos formados por los rayos del sol por un pozo en Siena y un gnomon en Alejandría para el 21 de junio.



Fuente: http://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/circunferencias/

Ahora lo único que faltaba era medir la distancia entre Siena y Alejandría, para esto contrato un grupo de soldados que la hicieron la medida en términos de estadios obteniendo una distancia de 5000 estadios entre las dos ciudades cabe resaltar que un estadio equivale a 185m. Dado que se tenía la relación entre 7,2° y 360° y la distancia entre Siena y Alejandría podría realizar una proporción de la siguiente forma:

Mateus (2013) afirma que: $\alpha = 7.2°$ y el ángulo de giro de la tierra $\beta = 360°$, así como la longitud del arco $\widehat{AS}$= 5000 estadios y la longitud a calcular p que es la circunferencia terrestre, de esta forma

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\widehat{AS}}{p}$ De esta manera se tiene lo siguiente $\frac{7.2°}{360°} = \frac{5000\ estadios}{p}$ por tanto se obtiene p asi:

$$p = \frac{5000\ estadios\ \cdot 360°}{7,2°}$$

Luego $p = 250000\ estadios$

Teniendo el valor del perímetro de la tierra y conociendo $p = 2\pi r$, para eratostenes ya era mas fácil calcular el radio de la tierra y el diámetro mediante la expresión $r = \frac{p}{2\pi}$, de esta manera se obtiene $r = \frac{250000\ estadios}{2\pi}$, entonces $r = 39789\ estadios$ y $2r = 79578\ estadios.$

Por consiguiente el perímetro terrestre es igual a 250000 estadios que es equivalente a 46250 Km y el radio terrestre 7361 Km (las medidas aceptadas hoy en día son perímetro terrestre 40030 Km y el radio terrestre 6371 Km).

Collette (1985) afirma que con los trabajos de Eratóstenes de Cirene y, sobre todo, con el tratado de astronomía de Aristarco de Samos, la necesidad de un estudio más profundo de las relaciones de ángulo-cuerda era cada vez más urgente (p. 148).

El uso de las razones trigonométricas se puede interpretar como el trabajo que realizo Eratóstenes, ya que para ese entonces él no concibe la noción de razón sin embargo se entiende modernamente que en la solución a sus problemas hay trigonometría.

Según Kline (1972) el fundador de la trigonometría es Hiparco, que vivió en Rodas y Alejandría y murió alrededor del año 125 a.C. (p.166). Aunque se conoce muy poco de los trabajos realizados por Hiparco, Ptolomeo (citado por Kline 1972) le atribuye a Hiparco Muchas ideas de trigonometría y astronomía. Le debemos a él varias observaciones astronómicas y descubrimientos (p. 166)

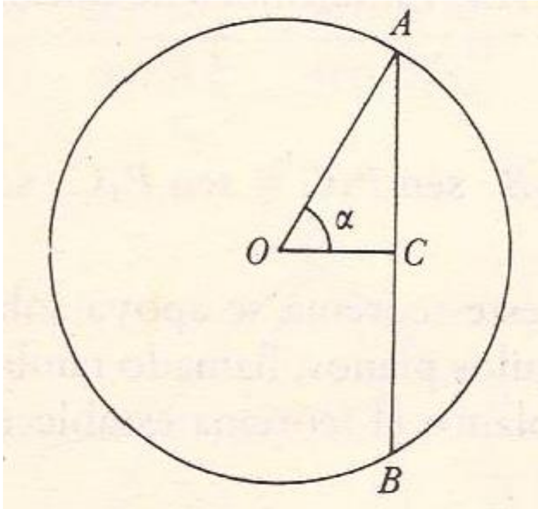
El método de Hiparco de aproximarse a la trigonometría, como lo describió y utilizó Ptolomeo es el siguiente:

"La circunferencia de un círculo se divide en 360° y un diámetro se divide en 120 partes, cada parte tanto de la circunferencia como de su diámetro se dividen en 60 partes y cada una de ellas a su vez en 60 partes tal como describe el método babilónico de fracciones sexagesimales". A la solución de este problema Kline asegura que:

> Entonces, para un arco dado AB de un determinado número de grados, Hiparco en un libro perdido actualmente, sobre cuerdas en un círculo, da el número de unidades en la cuerda correspondiente AB. Este número de unidades de la cuerda correspondiente a un arco de determinado número de grados equivale a la función seno moderno. Si 2α es el ángulo central del arco AB (Figura10), para nosotros $sen\alpha = \frac{AC}{OA}$, en vez de $sen\ \alpha$, Hiparco da el número de unidades en $2AC$ cuando el radio OA contiene 60 unidades. Por ejemplo, si la cuerda de 2α es de 40 unidades, para nosotros $sen\alpha = \frac{20}{60}$, o, con más generalidad (1972, p. 167):

$sen\alpha = \frac{1}{60}.\frac{1}{2}$ Cuerda de $2\alpha = \frac{1}{120}$ cuerda 2α

Figura 10[3]. Descubrimiento de Ptolomeo.



Fuente:(Kline 1972) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. . Bogotá, D. C: Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. (p.167)

Ahora bien, el hecho de que Hiparco lleve el nombre padre de la trigonometría es porqué fue el primero en tabular valores para lados del triángulo inscrito en la circunferencia. Por consiguiente el desarrollo de la trigonometría griega y sus aplicaciones culminaron con trabajos de Claudio Ptolomeo (muerto el 168 a.C.) quien terminó con los trabajos de Hiparco en trigonometría y astronomía, los cuales están mezclados en trece libros del Almagesto, en donde el libro I trata sobre la trigonometría y los restantes sobre astronomía. En el capítulo IX del libro I el Almagesto de Ptolomeo comienza calculando las cuerdas de los arcos de un círculo, con lo que extendía los trabajos de Hiparco.

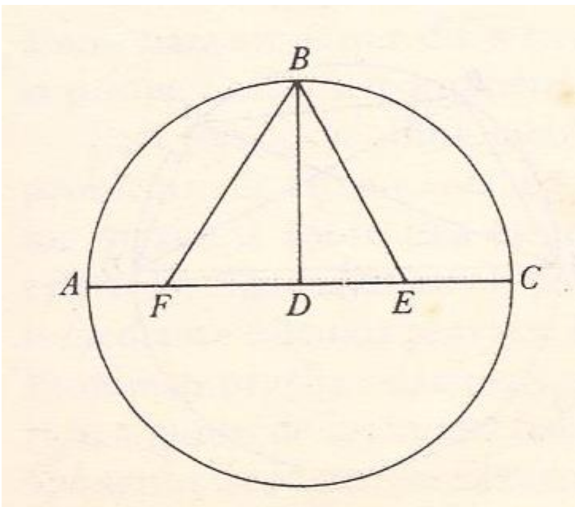
Así mismo, Ptolomeo señalaba que la circunferencia al dividirse en 360 partes o unidades (no usa la palabra grado) y el diámetro en 120 unidades; propone entonces, dado un

[3] Para apreciar mejor el descubrimiento de Ptolomeo ver Kline (1972, p. 167)

arco que contenga un número determinado de las 360 unidades, encontrar la longitud de la cuerda expresada en términos de las unidades que contiene el diámetro.

Ahora bien, para desglosar el trabajo de Ptolomeo se comienza con las cuerdas de 36° y 72° de la Figura11, ADC es el diámetro del círculo con centro en D y BD es perpendicular a $ADC.E$ es punto medio de DC y F se elige de tal manera que $EF = BE$. Ptolomeo demuestra geométricamente que FD coincide con un lado del decágono regular inscrito y BF, con un lado del pentágono regular inscrito. Pero ED contiene 30 unidades y BD, 60 unidades. Como $EB^2 = ED^2 + BD^2, EB^2 = 4500\ Y\ EB = 67\ 4'55''$ (lo que representa $67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2}$ unidades). Ahora $EF = EB$ por lo que se puede conocer EF. Entonces $FD = EF - DE = 67\ 4'55'' - 30 = 37\ 4'55''$. Como FD es igual al lado del decágono, es la cuerda del arco de 36°. Luego se conoce la cuerda de este arco. Utilizando FD y el triangulo rectángulo FDB, podemos calcular BF: es igual a $70\ 32'3''$. Pero BF es lado del pentágono, por lo que se tiene la cuerda del arco de 72°.

Figura 11. Demostración arco y cuerda de una circunferencia.

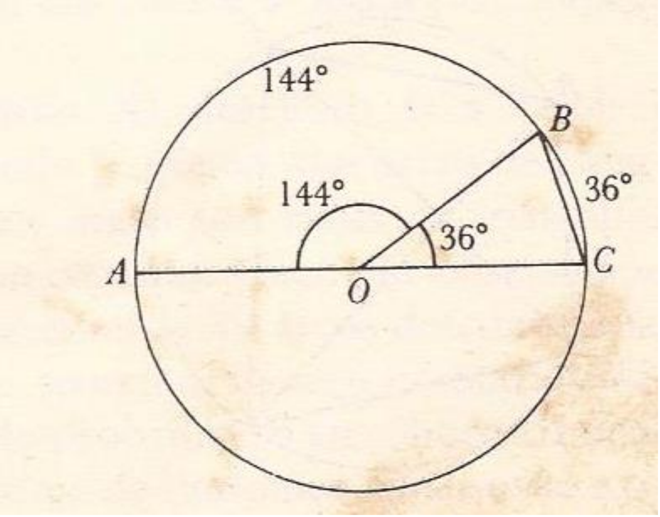


Fuente: (Kline 1972), Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. . Bogotá, D. C: Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. (p.171)

Con el uso del triángulo rectángulo ABC (figura 4) sobre el diámetro AC se puede obtener la cuerda del arco suplementario AB si se conoce la cuerda del arco BC. Por tanto como Ptolomeo conocía la cuerda de 36° podía calcular la de 144° que resulta ser $114\ 7'37''$. La relación que se ha obtenido es equivalente a $sen^2 A + cos^2 A = 1$, donde A es un angulo agudo arbitrario. Ptolomeo ha probado que si S es un arco menor de 180° entonces:

$$(cuerda\ S)^2 + [cuerda(180 - S)]^2 = 120^2$$

Figura 12. Demostración arco y cuerda de una circunferencia.



Fuente: Kline (1972) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. Bogotá, D. C. : Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. (p.171)

Pero por la relación (1) anterior

$$(cuerda\ S)^2 = 120^2 sen^2 \frac{S}{2}$$

Luego se tiene

$$120^2 sen^2 \frac{S}{2} + 120^2 sen^2 \frac{180 - S}{2} = 120^2$$

O bien

$$sen^2 \frac{S}{2} + sen^2 \left(90 - \frac{S}{2}\right) = 1$$

Es decir

$$sen^2 \frac{S}{2} + cos^2 \left(\frac{S}{2}\right) = 1$$

Para Ptolomeo la representación seno originalmente consiste en una relación con los arcos y cuerdas de una circunferencia, puesto que este profesionaliza dicho estudio y realiza su tabla de cuerdas, para ese entonces aún no había una asociación al concepto de razón.

En las matemáticas griegas se ve un desarrollo grande y se observa que lo que se conoce como razones trigonométricas hoy en día tienen se trabaja desde Tales de Mileto para el cálculo de la altura de la pirámide, en donde sobresale nuevamente las razones conocidas como tangente y cotangente tomando fuerza en las primeras civilizaciones ya mencionadas anteriormente, es enriquecedor tener dentro de la historia una serie de actividades para implementar en el aula a partir de todos los hallazgos realizados por los matemáticos griegos.

1.1.4 Aportes de la Cultura Hindú y Árabe

Los sucesores de los griegos en la matemática fueron los hindúes, esta civilización data del 2000 a.C., pero, dentro de lo que se puede saber, no existía ningún tipo de matemática antes del 800 a.C. Del periodo del 800 a.C. hasta el 200 de nuestra era. En la traducción del texto de Bond (1921) se puede apreciar que los hindúes lograron expresar en palabras la relación de equivalencia entre $sen\alpha^2 + cos\alpha^2 = 1 \ y \ sen^2 2\alpha + (\boldsymbol{sen\,verso})2\alpha = (2sen\alpha)^2 \quad o \quad sen\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - cos^2\alpha)} \ donde\ r = 1(1)$. Estas fórmulas difieren de Ptolomeo en el uso del seno como media cuerda en lugar de usar toda la cuerda; fue por el uso de este instrumento que los árabes se les permitió construir en la fundamentación griega una trigonometría auxiliar de cuerdas completa.

El trabajo de los matemáticos griegos con respecto a la trigonometría, estuvo ampliamente motivado por los estudios en astronomía, calcular las distancias entre los planetas y poder tener modelos geométricos que les pudiera acercarse a una medición de la realidad en que vivían. Inscribir el triángulo en la circunferencia, les permitió estudiar las relaciones que tienen los ángulos del triángulo (especialmente el ángulo central en el círculo), con los lados del triángulo que ahora se convertían en las cuerdas.

Ahora bien, principalmente después de la gran apreciación por Tales de las sombras que se formaban en diversas situaciones, que le permitió medir la altura de la pirámide; los demás aportadores a los conceptos trigonométricos también utilizaron esta técnica de conocer las alturas y sobre todo las *sombras*. Éstas eran llamadas en la matemática árabe como *umbra* *versa* (primera sombra) y *umbra extensa* (segunda sombra) (Bond, 1921), las cuales son interpretadas como la *tangente* y la co*tangente* respectivamente. Al respecto de estos términos, Bond (1921) señala que eran vistas o tomadas con un significado aparte del seno y el coseno.

> El cambio sustancial que aporta la matemática árabe, con respecto a las razones trigonométricas, es que *Abùl-Wefa,* toma éstas relaciones *umbra* como líneas trigonométricas, es decir, una concepción totalmente novedosa, pues al tomar el radio del círculo como la unidad, este denota que es evidente que si se toma el radio como la unidad, la razón del seno de un arco es al seno de su complemento (coseno) es a la tangente (primera sombra) y la razón del seno del complemento (coseno) al seno del arco es la cotangente (segunda sombra). (Bond, 1921, p. 311)

Esto significa, que *Abúl-Wefa*, considera las siguientes relaciones, que en notación actual serían las siguientes:

$$tan\alpha : 1 = sen\alpha : cos\alpha$$

$$cot\alpha : 1 = cos\alpha : sen\alpha$$

Cabe resaltar que la diferencia fundamental que se puede encontrar con ésta trigonometría de los griegos y los árabes, es que nuestra noción actual de razón no entra en su estudio, pues ellos se dedicaron especialmente a estudiar las longitudes de cuerdas o media cuerda (seno) en un círculo de radio conocido. Una concepción de estas relaciones como *razones trigonométricas* más específicamente, aparece en Europa alrededor del siglo XV (Bond, 1921).

De esta manera, se puede interpretar que la cultura árabe asimilo los conceptos producidos por otras civilizaciones, por parte de la trigonometría sistematiza el uso del seno del ángulo, en lugar de la cuerda helénica. Tomaron el seno verso (1-cosα) de la trigonometría india, y los árabes introdujeron las restantes razones trigonométricas.

Habas al –Hasib (aproximadamente 762-862), además de ser el primer árabe que elaboro una tabla de senos, determino la sombra de un *gnomon* (indicadores de hora de los relojes solares) colocado en la pared de forma horizontal como medida tomo como unidad (según los diferentes ángulos del sol entre 0 y 90°) los resultados los recogió en una tabla que equivale a una tabla de tangentes, que en esta época se denominaba como sombra que venía de la trigonometría hindú.

Hasta este punto, los estudios realizados alrededor de la trigonometría según Bond (1921) se encuentran estrechamente relacionados con los aportes de *Jabir*[4] el cual su obra fue traducida por *Gerard de Cremona* y publicado por *Peter Apian* en 1534 en el cual la proposiciones de su libro parecen tener una trigonometría de las razones de los lados de un triángulo rectángulo; aunque en 1321 con el trabajo de *Leo Ben Gerson* ya se muestran una especie de teoría de resolución de triángulos, la cual es la actividad desarrollada en trigonometría actualmente.

En esta civilización se ve un gran desarrollo en cuanto a las razones trigonométricas conocidas actualmente y la relación que existe entre las más utilizadas por civilizaciones

---

Se deja a gusto del lector profundizar en los aportes de *Jabir* apreciado parcialmente en el texto de (Bond, 1921. P. 314).

anteriores como son tangente y cotangente en términos de seno y coseno que es parte importante de nuestro trabajo de grado ya que se buscaba a través de la historia donde aparecen estos objetos matemáticos.

1.1.5. El Renacimiento hasta la actualidad

Hasta 1450, la trigonometría comenzó a tener importancia en la agrimensura (rama de la topografía destinada a la delimitación de superficies) afirma Kline (1972) la trigonometría era sobre todo trigonometría esférica; la agrimensura continuaba utilizando métodos geométricos de los romanos. La relación entre el álgebra, la geometría y la trigonometría fue posible gracias a la función seno y al estudio hecho por los indios de las sombras proyectadas por un gnomon.

Aparecen los alemanes y con ellos se presentan trabajos en trigonometría a finales del siglo XV y principios del XVI motivados por la navegación, el cálculo del calendario y la astronomía dado que había crecido el interés con la creación de la teoría heliocéntrica. Dentro de los personajes de mayor importancia se encuentran:

Johannes Müller (1436-1476) astrónomo y matemático conocido como Regiomontano fue quien se encargó de revitalizar la trigonometría en Europa. Kline (1972) menciona que hizo las traducciones de trabajos griegos *Las Secciones Cónicas* de Apolonio y partes de Arquímedes y Herón. Regiomontano aprovechó los trabajos de los árabes orientales y en su libro *De Triangulis* que se compone de 5 libros escritos entre 1462 y 1463 reunió de manera efectiva el conocimiento disponible de la trigonometría plana, geometría esférica y trigonometría esférica. El primer libro da las definiciones básicas como cantidad, radio, el sustento de los 56 teoremas que enunciara en el segundo la ley del seno de lo cual Kline (1972) manifiesta que obtuvo la ley de los senos para triángulos esféricos es decir $\frac{sen\ a}{senA} = \frac{senb}{senB} = \frac{senc}{senC}$ y la ley de los cosenos que relaciona los lados, esto es: $cosa = cosb\ cosc + senb\ senc\ cosA$. Los libros III, IV y V tratan de trigonometría esférica centrando el tema para las posteriores obras de astronomía.

George Peurbach (1423-1461) Adoptó el seno hindú, esto es la semicuerda del semiarco, y construyó tablas de senos con radios de 600.000 unidades y 10.000.000 de unidades, también construyó una tabla de tangentes, de lo anterior Kline (1972) afirma: En la *Tabulae Directionum* (escrita entre 1464 y 1467), dio tablas de tangentes de cinco cifras y subdivisiones decimales de los ángulos, un procedimiento muy poco habitual para aquellos tiempos.

Entre los personajes que construyeron tablas en los siglos XV y XVI se pueden mencionar a George Joachim Rhaeticus (1514-1576) , Nicolás Copérnico (1473-1543), Francois Vieta (1540-1603) y Bartolomäus Pitiscus (1561-1613). La importancia de realizar estas tablas era el de ir incrementando el radio en un número mayor de unidades para obtener cantidades trigonométricas más precisas de esta manera Kline menciona:

Rhaeticus calculo una tabla de senos basada en un radio de 10^{10} unidades y otra basada en uno de 10^{15} unidades, y dio valores para cada 10 segundos de arco. Pitiscus en su *Theasurus* (1613) corrigió y publicó la segunda tabla de Rhaeticus. La palabra t*rigonometría* es suya. (1972, p.320)

Rhaeticus quien fue discípulo de Copérnico cambio el significado del seno y en su libro *Opus palatinum de triangulis*, considerado como la obra de trigonometría más elaborada de lo anterior Collette (1985) aporta que:

En este libro de dos volúmenes, no trata ya las funciones en términos de arcos de círculos e introduce una innovación al definir por primera vez las funciones trigonométricas en términos de la razón entre los lados de un triángulo rectángulo. (1985, p.278)

Francois Vieta (1540-1603) es el encargado de sistematizar y extender la trigonometría plana y esférica, abogado de profesión, fue el matemático más importante del siglo XVI. Su Obra *Canon Mathematicus* (1579) es el primero de muchos trabajos sobre trigonometría donde se encargó de reunir fórmulas para la resolución de triángulos planos rectos y oblicuos, además de incluir la ley de tangentes.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

De lo anterior Kline (1972) afirma Vieta proporcionó el conjunto completo de fórmulas que se necesitan para calcular cualquier elemento en términos de otros dos cualesquiera, y la regla para recordar esta colección de fórmulas, que ahora llamamos regla de Napier.

Hasta el siglo XVI ya la trigonometría empieza a separarse de la astronomía a lo cual Kline (1972) menciona que adquirió el rango de rama de las matemáticas. Siguió siendo importante para la astronomía pero también abrió paso al desarrollo de la agrimensura que es el estudio de medir las tierras a lo que afirma Kline (1972) garantiza un punto de vista más independiente.

De lo recogido en la historia podemos decir que nuestro trabajo se va a centrar en la civilización griega, puesto que hay trabajos importantes que tiene que ver con la observación, la toma de medidas y el dar solución a una pregunta planteada. Aunque la toda la historia es importante para la construcción del objeto matemático nuestra actividad se verá reflejada en este punto de la historia.

1.2 ASPECTOS TRIGONOMÉTRICOS.

Después del breve recorrido histórico se hace necesario para los lectores visualizar un conocimiento más actualizado de los conceptos básicos, referentes a la trigonometría. Por tal razón, en este apartado se caracteriza el significado de la trigonometría, el concepto de razón, de medida así mismo, algunos aspectos importantes del triángulo como sus propiedades entre otros.

1.2.1 Significado de la trigonometría desde un enfoque histórico

A partir del recorrido histórico se hace muy notable que en la antigüedad para dar soluciones a sus múltiples problemas, y para la realización de cálculos con el respectivo sistema de medida, se estudiaron áreas como, la astronomía, la medición de triángulos, ángulos, relaciones de lados y ángulos; donde los ya nombrados se unen dando origen a lo que hoy se conoce con la palabra trigonometría la cual procede de dos raíces griegas *τριγωνος-trigōnos* que significa triángulo y *μετρον metron* que significa medida

1.2.2 Conceptos básicos alrededor de la trigonometría

El concepto de medida

El termino medida por ser tan amplio y estar enfocado en distintas ramas del conocimiento, solo adquirirá un sentido desde el punto matemático. El concepto de medida por ser tan fundamental, está relacionado con el proceso de medir tal como lo afirma Mateus (2013) al ser el método para la realización de mediciones y de establecer un patrón arbitrario mediante un sistema de referencia para cada característica que sea posible cuantificar, de modo que se pueda asignar a tal característica un valor determinado (p. 41). De esta manera la medición se puede identificar como el mecanismo por el cual es posible comparar determinado patrón, dejando claro que puede ser elegido de forma imparcial, con un objeto que tiene características cuantificables llamadas magnitudes.

Por otra parte sabemos que las matemáticas antiguas han sido construidas bajo el concepto de cantidad los cuales se dividen en dos tipos como son los números y las magnitudes de lo anterior Recalde afirma:

> Es así que para Aristóteles las matemáticas conforman la ciencia de la cantidad; entendiendo por cantidad aquello que es divisible en elementos constitutivos. De esta manera, existen dos tipos de cantidades: los números y las magnitudes. Los números que son divisibles en partes no continuas y las magnitudes que pueden dividirse en partes continuas. La forma segura de conocer la cantidad es a través de la medida. En términos generales, los Elementos constituyen el primer compendio sistemático de una teoría de la medida. Aunque Euclides no establece una definición de medida, sigue las mismas directrices de la filosofía aristotélica en sus dos aspectos fundamentales. (2015, p.17)

A continuación se evidencia un concepto más amplio de magnitud para tener una idea más clara de lo que se mencionó anteriormente.

El concepto de magnitud

En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos. Batanero, C., Godino, J. y Rafael R (2002) Afirman que: “Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad o la luminosidad” (p. 615).

Actualmente se usa la misma escala numérica para representar longitudes, áreas y volúmenes pero a cada área a cada longitud y a cada volumen se le tiene representado mediante un número en la escala numérica que se conoce como medida de esta manera Recalde asegura:

> Esta forma de medir, que se nos antoja simple para nosotros hoy día, se dio en proceso largo y arduo que justamente adquiere una primera dimensión conceptual en la antigüedad griega, sufre algunos cambios en el renacimiento, especialmente con Descartes, y llega a su punto culminante con los trabajos de Cantor y Dedekind, en el siglo XIX, cuando se establece el matrimonio indisoluble entre número y magnitud. (2015, p. 18)

De lo anterior podemos inferir que la medida de magnitudes nos obliga a reflexionar sobre el problema que existe entre las matemáticas y la realidad de lo anterior Batanero et al (2002) cerciora Los fenómenos físicos y sociales son organizados mediante el lenguaje matemático y ello nos lleva a reflexionar sobre la naturaleza de los objetos matemáticos (problemas, técnicas, símbolos, conceptos, proposiciones, justificaciones, teorías, etc.

También se hace importante mencionar que existen magnitudes conmensurables, las cuales hacen referencia a la misma naturaleza para lo cual es posible encontrar una unidad de medida en común para complementar esta idea Mateus afirma:

> Que las mida o cuantifique a cada una de ellas de manera exacta. En términos de la magnitud longitud para realizar comparaciones y establecer razones entre dos de los lados de una figura, o un lado y su diagonal, debe existir una unidad de medida que

cuantifique ambas longitudes con cantidades expresadas en términos de números naturales (2013, p.50)

Así como están las magnitudes conmensurables existen las magnitudes inconmensurables en donde se puede decir que si dos magnitudes son de la misma naturaleza y no son comparables entre sí, es porque no existe una unidad o patrón de medida común que las mida exactamente Mateus aporta un ejemplo importante:

> La idea de inconmensurabilidad nace de la imposibilidad de medir o comparar la diagonal de un cuadrado y uno de sus lados por medio de razones entre cantidades enteras. Los pitagóricos fueron los primeros capaces de demostrar rigurosamente y por contradicción ésta inconmensurabilidad y la de la diagonal de un pentágono regular con respecto a su lado. (2013, p.51)

De esta manera, las magnitudes que no guardan una proporción que pueda enunciar con números naturales son llamadas inconmensurables, idea que provee un primer acercamiento al concepto de número irracional.

El concepto de Proporción

Para hablar de proporción tendremos que entrar a definir algunos conceptos previos como lo es el concepto de razón el cual comúnmente lo observamos en las fracciones y números racionales al realizar representaciones, pero es de tener en cuenta que no siempre es una fracción de lo anterior Godino (2002) expone: Es importante, sin embargo, estudiar con más detalle el uso que se hace del término “razón”, ya que no siempre es sinónimo de “fracción”, lo cual puede acarrear dificultades de comprensión para los estudiantes.

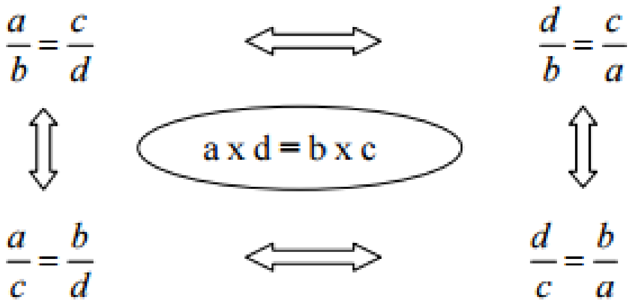
El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones para complementar lo anterior Godino presenta una serie de ejemplos como:

- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como 4:7.
- Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 145 euros. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como “dos de tres partes”, lo que se indica con 2/3. Según esto la razón 3 jamones/145 euros no es una fracción.
- Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades. (2002. p. 420)

Ahora que se tiene el concepto de razón, es pertinente entrar a definir el que es una proporción la cual es un término que procede del vocablo latino *proportĭo*. Se trata de la correspondencia, el equilibrio o la simetría que existe entre los componentes de un todo. La proporción puede calcularse entre los elementos y el todo o entre los propios elementos.

Una proporción aparece de forma general como la igualdad entre dos fracciones en donde el producto cruzado de los numeradores y denominadores es igual entre sí. En la siguiente Figura se dará un claro ejemplo de lo mencionado anteriormente.

Figura 13. Ejemplo del concepto de proporcionalidad



Fuente: Godino. J & Batanero, C (2002). Proporcionalidad y Didáctica par maestros BSO200202452, Colombia: Publicación en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología (p. 422)

Dentro de las proporciones se tiene proporcionalidad directa en la cual dadas dos magnitudes A y B son directamente proporcionales si al aumentar una también aumenta la otra de lo anterior Godino amplia:

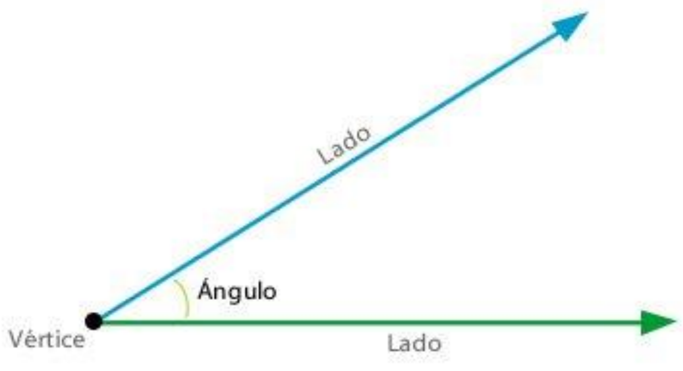
> Se dice que son proporcionales si están en correspondencia de tal manera que las medidas de las cantidades que se corresponden forman dos series de números proporcionales entre sí, es decir si existe una aplicación lineal f: A → B. (2002, p.423)

Además está la proporcionalidad inversa en donde dadas dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si al aumentar una la otra disminuye o viceversa de lo anterior Godino (2002) amplia: Se dice que dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si los valores tomados por la magnitud A y los inversos de los valores tomados por la magnitud B forman dos series proporcionales.

El concepto de ángulo

Euclides define ángulo plano como "la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta"[5] y posterior a ello profundiza en el concepto de ángulos adyacentes, ángulo recto y perpendicular, con las definiciones 9 y 10. Pero actualmente ángulo se denota como la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen o vértice. Suelen medirse en unidades tales como el radián, el grado sexagesimal o el *grado centesimal*[6]. A continuación en la Figura14 se muestra un ejemplo de ángulo.

Figura 14. Representación del concepto de ángulo.



Fuente: https://www.portaleducativo.net/tercero-basico/144/Clasificacion-angulos-rectos-agudos-obtusos

[5] Elementos de Euclides. Libro I, Def. 8

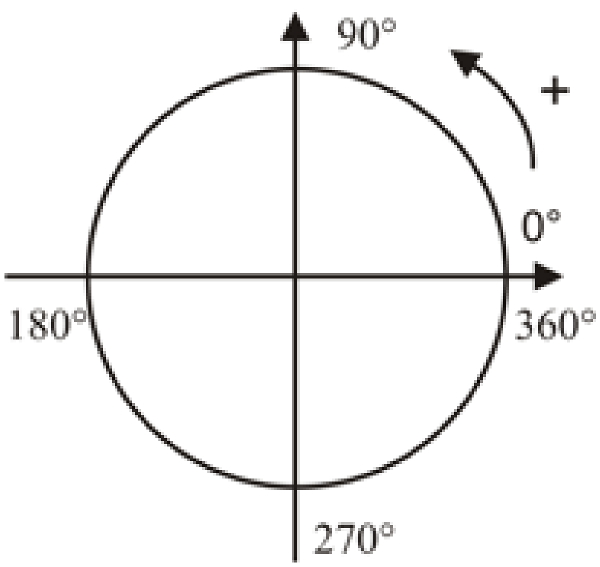
[6] El ***grado centesimal*** o ***gon*** —también llamado ***gradián*** (plural: gradianes) y ***gonio*** es una unidad de medida de ángulos planos, alternativa al grado sexagesimal y, como este, no perteneciente al Sistema Internacional de Unidades, cuyo valor se define como el ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a 1/400 de la circunferencia.

El concepto de Grado

El grado es una unidad de medida usada para medir los ángulos. El cual se cataloga como el "ángulo que se forma al girar una vuelta el lado inicial en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, de modo que coinciden consigo mismo (1 revolución) mide 360 grados, que se abrevia 360º "(Sullivan, 1997. p. 91).

Así. Un grado (1º) es $\frac{1}{360}$ de revolución. Es preciso afirmar que en matemáticas se presentan diversas versiones del concepto de grado y está depende del área matemática en la cual centre su atención. No obstante, en geometría, se presentan varias escalas, como lo es el Grado sexagesimal, cuando la circunferencia se divide en 360 grados en una figura, y el *Grado centesimal, cuando la circunferencia se divide en 400 grados.* De los cuales para el desarrollo de este trabajo solo se tendrá en cuenta el sexagesimal. En la Figura15 se muestra una circunferencia con algunos ángulos especiales.

Figura 15. Ejemplificación del concepto de ángulo.



Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Grado_sexagesimal

Grado sexagesimal

El grado sexagesimal, se define a partir del ángulo recto tiene 90 grados sexagesimales, y sus divisores son el minuto sexagesimal y el segundo sexagesimal, y se encuentran están definidos, como se muestra a continuación con su respectiva notación.

- 1 ángulo recto = 90° (grados sexagesimales).
- 1 grado sexagesimal = 60′ (minutos sexagesimales).
- 1 minuto sexagesimal = 60″ (segundos sexagesimales).

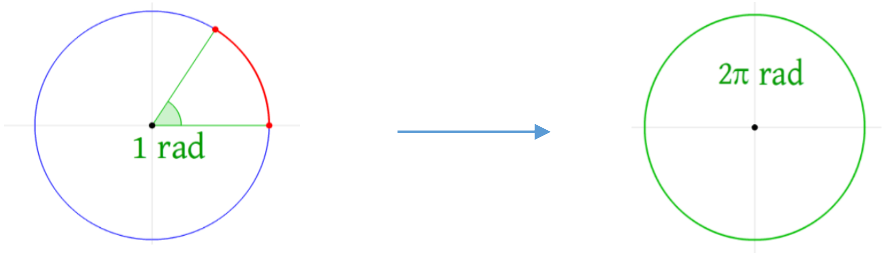
[7]Esta notación sexagesimal tiene su origen en Mesopotamia, donde los astrónomos y matemáticos usaron para sus cálculos frecuentemente números en sistema sexagesimal lo cual facilitaba sus cálculos (ya que 60 tiene un gran número de divisores)

El concepto de radian

Un radián es la unidad de medida de un ángulo con vértice en el centro de un círculo cuyos lados son cortados por el arco de la circunferencia, y que además dicho arco tiene una longitud igual a la del radio[8]. En la Figura10 se evidencia un ángulo de 1 radián el cual corresponde al arco de circunferencia cuya longitud es su radio; así mismo, una circunferencia completa, donde esta tiene un equivalente a 2π radianes.

[7] Definición grado sexagesimal.
[8] Definición de radian.

Figura 16. Ejemplificaron del concepto de radian.



Fuente: http://gaussianos.com/que-es-un-radian/

Para efectos del desarrollo de esta propuesta, el sistema de medida a utilizar será el sexagesimal y sus respectivos submúltiplos, como los son el grado, el minuto él y segundo puesto que, al ser este el requerido en las construcciones de las tablas de cuerdas de Hiparco y de Ptolomeo como se caracterizó en párrafos anteriores, servirán como apoyo para el desarrollo de las actividades.

Teorema de la longitud de arco

Sullivan (1997) afirma que para un círculo de radio r y centro en o un ángulo central de θ radianes subtiende un arco cuya longitud es s:

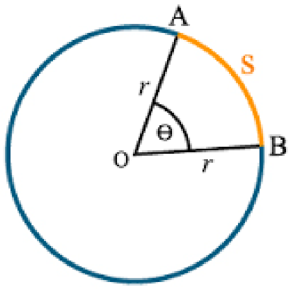
$$s = r\theta$$

Donde

$$\frac{\theta \; Radianes}{1 \; Radian} = \frac{s \; Unidades \; de \; longitud}{r \; Unidades \; de \; longitud}$$

A continuación en la Figura11 se presenta un ejemplo de la longitud de arco.

Figura 17. Ejemplificación de la longitud de arco.



Fuente: http://www.academico.cecyt7.ipn.mx/Geo_Trig/menus/unidad2_4.html

Relación entre grados y radianes

Al Considerar un círculo de radio r. Si se tiene un ángulo central de 1 revolución y estas se unen mediante una línea recta por los extremos de un arco central a la circunferencia del círculo como se muestra en la Figura10; donde una revolución equivale a 2π radianes. Dado que la circunferencia del círculo es igual a $2\pi r$, usamos $s = 2\pi r$ y por el teorema de la longitud de arco se entiende como a $s = r\theta$ para encontrar que, para un angulo de θ de 1 revolución, equivale a:

$$s = r\theta$$

$$2\pi r = r\theta$$

$$\theta = 2\pi \text{ Radianes}$$

Por consiguiente si se sabe que

$$1\ revoluciòn\ = 2\pi \text{ Radianes}$$

Entonces

$$360° = 2\pi \text{ Radianes. Así como } 180° = \pi \text{ Radianes}$$

1.3 CONCEPTO DE RAZÓN.

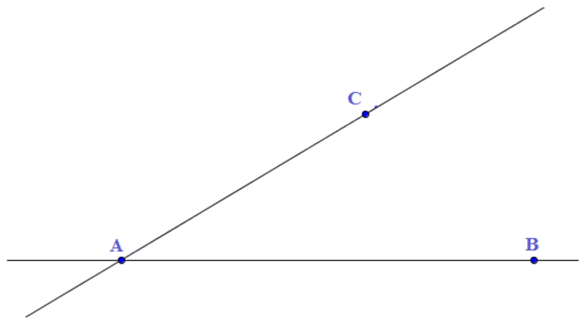
Este trabajo de grado gira en torno al concepto de razón trigonométrica de tal forma, para la caracterización de este, es necesario retomar algunos de los momentos de su nacimiento, teniendo en cuenta que la razón es instaurada por Tales de Mileto producto de la aplicación del concepto razón en la semejanza de triángulos , para medir las alturas de las pirámides de Egipto, posteriormente se define el concepto por Pitágoras, también es desarrollado por Eudoxo en su teoría de las proporciones y finalmente sintetizada por Euclides en el libro V de los elementos. Para complementar lo anteriormente escrito, Mateus afirma:

> Desde el punto de vista de las primeras demostraciones geométricas, el concepto de razón se da con Tales de Mileto al aplicar las propiedades de la semejanza en triángulos para medir las alturas de las pirámides de Egipto. Tales debió iniciar con el reconocimiento y pleno convencimiento de algunas propiedades geométricas referentes a rectas, ángulos, círculos y triángulos, que consideró como reglas básicas aceptadas de manera intuitiva a partir de demostraciones empíricas. La evidencia de dichas propiedades se encuentra en los famosos teoremas que formuló el mismo Tales de Mileto. (2013, p.46)

El teorema de Tales expresa las propiedades o relaciones entre los ángulos que se forman al cortar dos paralelas por una recta, pues es éste teorema el que facilitará el análisis frente a las condiciones de semejanza en triángulos a la luz de los conceptos de razón y proporción, que es de gran importancia para el desarrollo de este trabajo. Ahora observaremos por medio de las siguientes ilustraciones el trabajo realizado por Tales. Para lo cual (Mateus. 2013, p.47-48) realiza la siguiente construcción como se ilustrara en las siguientes figuras:

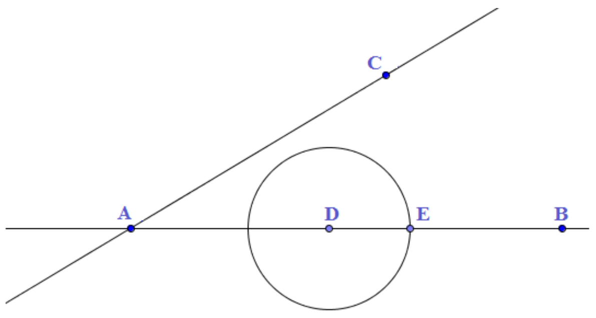
Se traza una recta horizontal que pase por dos puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Luego, por un punto $\boldsymbol{C}$ exterior a dicha recta se construye una recta $\boldsymbol{AC}$, oblicua a la recta $\boldsymbol{AB}$ Figura18. Se construye un punto $\boldsymbol{D}$ sobre la recta $\boldsymbol{AB}$ y una circunferencia con centro en $\boldsymbol{D}$ y radio $\boldsymbol{DE}$.

Figura 18. Construcción de segmentos.



Fuente: Adaptada de Mateus (2013) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. . Bogotá, D. C. : Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia (p.47)

Figura 19. Se construye una circunferencia con centro en E y radio DE

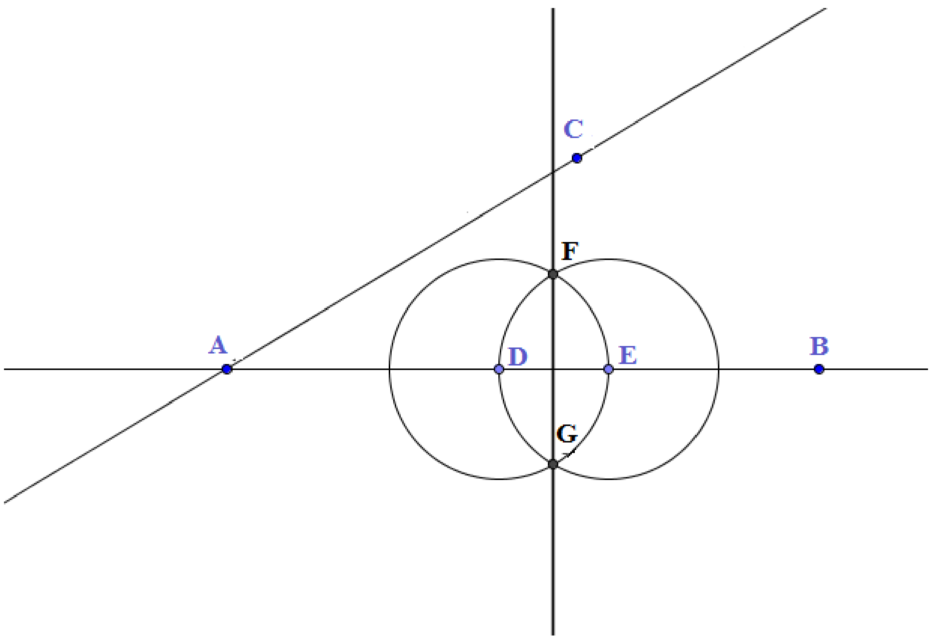


Fuente: Adaptada de Mateus (2013) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. . Bogotá, D. C. : Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia (p.47)

Es de suma importancia resaltar que por medio de esta construcción se llegará a formar dos triángulos semejantes y que de estos triángulos podremos obtener y llegar a trabajar con el concepto de razón dadas algunas proporciones. Continuando con la construcción Mateus realiza los siguientes pasos:

> Se construye una circunferencia con centro en ***E*** y radio ***DE***. Luego se marcan los puntos de intersección ***F*** y ***G*** entre las dos circunferencias y se traza una recta que pase por ***F*** y ***G***, perpendicular a ***AB*** tal como lo observado a continuación en la Figura20. (2013, p. 47)

Figura 20. Continuación de la construcción.



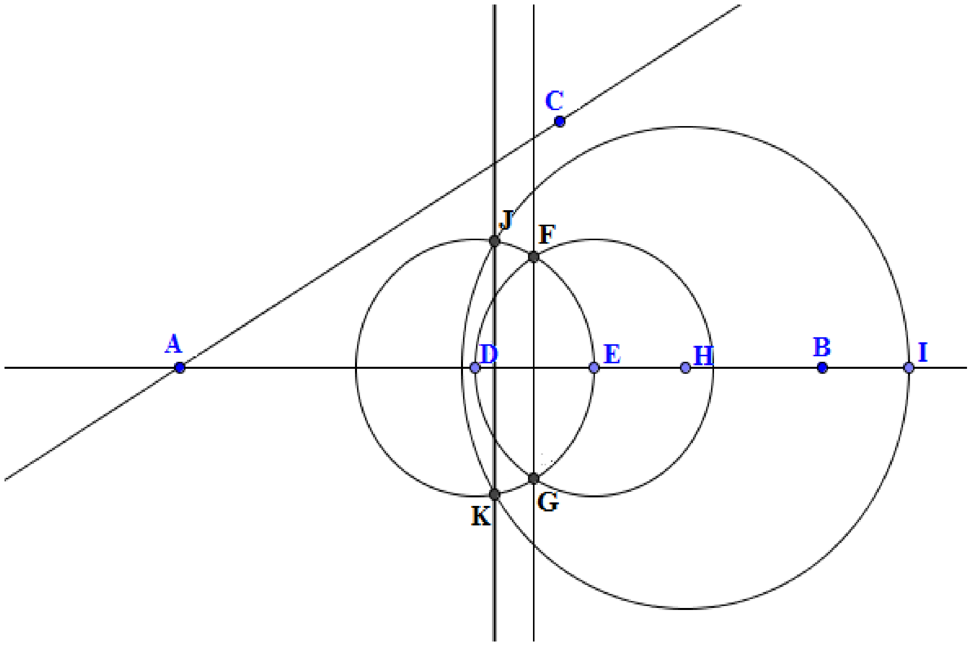
Tomada y adaptada de Mateus (2013) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. . Bogotá, D. C. : Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia (p.48)

> Se marca un punto ***H*** sobre ***AB*** y se traza una circunferencia con centro en ***H*** y radio ***HI***. Luego se marcan los puntos de intersección ***J*** y ***K*** de la circunferencia de

radio ***HI*** con otra de las circunferencias (en este caso la circunferencia de radio ***HI*** se interseca con la circunferencia de radio ***DE*** con centro en ***D***). Se traza una recta que pase por los puntos ***J*** y ***K***, perpendicular a la recta ***AB***.

A continuación se observa la Figura 21 donde muestra lo anterior:

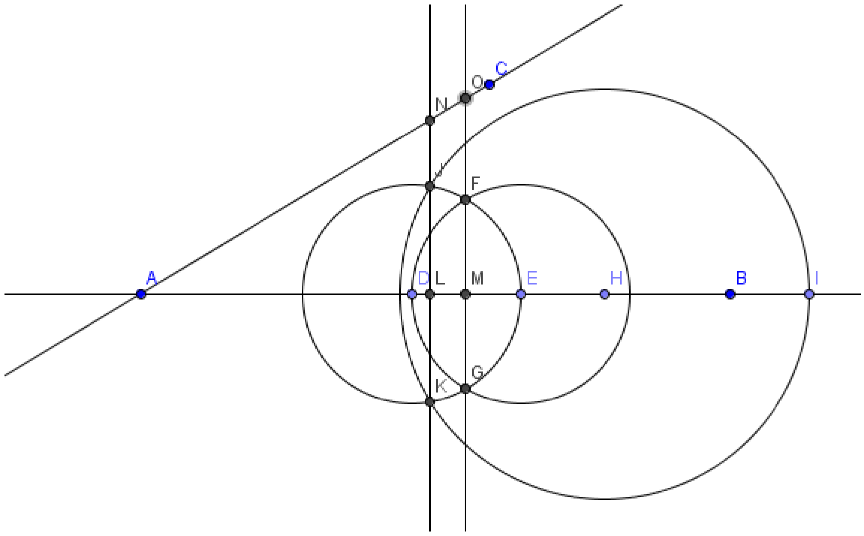
Figura 21. Continuación de la Construcción.



Tomada y adaptada de (Mateus 2013) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. . Bogotá, D. C. : Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia (p.48).

Se nombran los puntos de intersección de las rectas perpendiculares a ***AB*** con dicha recta, como ***L*** y ***M***, y con la recta ***AC*** como ***N*** y ***O.***

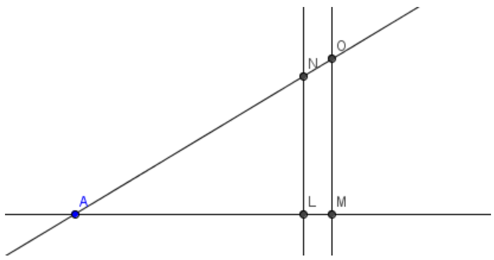
Figura 22. Construcción de dos triángulos semejantes.



Tomada y adaptada de (Mateus 2013) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. . Bogotá, D. C. : Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia (p.48).

Como se habló anteriormente de esta manera se llega a la construcción de dos triángulos semejantes con alturas ***LN*** y ***MO*** y bases ***AL*** y ***AM*** respectivamente como se observará en la Figura 23.

Figura 23. Representación de dos triángulos semejantes donde ANL es semejante a AOM.



Tomada y adaptada de (Mateus 2013) Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo. . Bogotá, D. C: Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia (p.48).

Por lo presentado anteriormente se hace importante mencionar que se puede establecer las razones para los triángulos semejantes en términos de Euclides el cual menciona que los lados son magnitudes proporcionales si guardan la misma razón, por tanto tenemos lo siguiente $\boldsymbol{LN / AL = MO / AM \rightarrow \Delta ANL \sim \Delta AOM}$, de lo anterior Mateus hace referencia:

> Para el caso de la construcción, si existe una relación de semejanza entre los triángulos ***ANL*** y ***AOM*** Figura23, se deduce la proporcionalidad entre los lados de los triángulos. Por ejemplo, para el cociente entre los lados o catetos ***LN*** y ***AL*** del triángulo ***ANL***, se obtiene el mismo cociente entre los lados o catetos ***MO*** y ***AM*** del triángulo ***AOM.*** (2013, p. 49)

Por otra parte, para ejemplificar algunos de estos aspectos de razón es importante hablar de las proporciones puesto que (Salcedo, 2012. p.17) establece que esta "noción desde la antigüedad está asociada con la idea de precisar cuantitativamente la noción de semejanza comparando cosas de la misma especie, de hallar sus razones en el sentido de comparar la medida de una magnitud".

En relatos anteriores se muestra como las antiguas civilizaciones en particular la civilizaciones griega fueron los incipientes en la búsqueda de teorías a partir de los sentidos o del dato observable, y posterior a ello, le siguió en nacimiento de la escuela Pitagórica liderara por un principio en particular que "Todo es número". Así mismo, en las civilizaciones los babilónicas egipcios entre otros aparece algo en común y es el caso de precisar la idea de razón y proporción, alrededor de que la proporción es una medida geométrica dada por $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$; $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ y la proporción aritmética está dada por $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$. Por consiguiente, el desarrollo de la teoría de las proporciones, estaba centrado en mostrar la armonía cósmica por medio de la incorporación de razones numéricas entre cantidades discretas y la comparación entre estas, para establecer proporciones. Sullivan (2012).

Por consiguiente en el libro V los elementos de Euclides, se entiende el concepto de razón como "*Una razón determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas*" En Mateus (2013) este concepto se manifiesta como una cantidad que no expresa una magnitud, sino la relación entre magnitudes; las cuales permiten identificar la relación geométrica entre dos magnitudes o medidas de la misma naturaleza. Igualmente, en la definición 5 aparece una definición que según Sullivan (2012) fue él Eudoxo quien reformulo la teoría de las proporciones de la siguiente manera:

> *Las magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando tomados cualesquiera equimultiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimultiplos de la segunda y la cuarta entonces los primeros equimultiplos ambos exceden, son iguales o menores que los segundos equimultiplos tomados en el orden correspondiente*[9].

Esta definición retoma la idea de razón entre medidas geométricas y se entiende como, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si, dados dos números naturales p y q y si se dice que $pa < qb$ esto es equivalente a tener $pc < qd$, o si $pa = qb$ equivale a $pc = qd$ o si $pa > qb$. Esto equivale a tener $pc > qd$ Eudoxo se preocupó también por aclarar que las magnitudes tienen que ser del mismo tipo;

[9] Definición 5, Libro V de los Elementos de Euclides

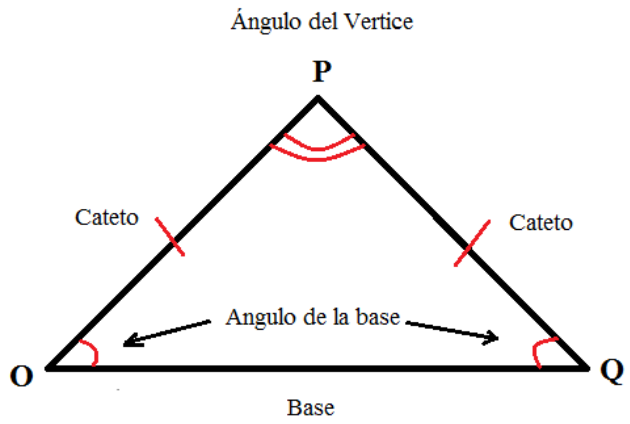
según él un segmento no puede compararse en términos de razón con un área, ni un área puede compararse con un volumen, dando lugar a la restricción del establecimiento de razones homogéneas, que se conservaría hasta el surgimiento del cálculo.

1.4 CONCEPTO DE TRIÁNGULO.

En Geometría, es un polígono de tres segmentos que determinan tres puntos del plano y su limitación. Cada punto dado pertenece a dos segmentos. Los puntos comunes a cada par de segmentos se denominan vértices del triángulo y los segmentos de recta determinados son los lados del triángulo. Dos lados contiguos forman uno de los ángulos interiores del triángulo. Un triángulo es una figura estrictamente convexa.

Otra forma de caracterizar este término es: si O, P y Q son tres puntos arbitrarios no lineales, pero si se une el segmento $\overline{OP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{QP}$ se denomina trianguló y tiene por símbolo Δ OPQ como se muestra en la figura 24.

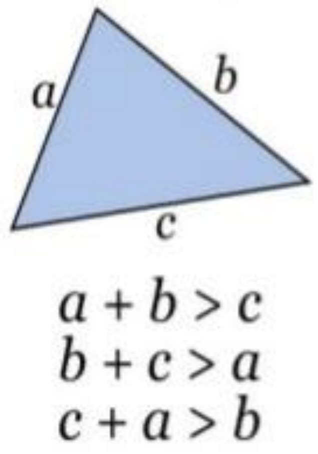
Figura 24. Ejemplificación, definición de triangulo.



Fuente: Adaptada por los autores.

Dentro de definición de triángulo también se encuentra inmersa, propiedades importantes, como lo es la desigualdad triangular la cual establece que en todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante, un ejemplo de ello se puede observar en la Figura25 . Y también se tiene otra propiedad donde esta garantiza que en todo triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos internos es 180°.

Figura 25. Desigualdad triangular.



Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Desigualdad_triangular

Concepto de triangulo rectángulo

De denomina triángulo es rectángulo al polígono de tres segmentos donde uno de sus ángulos mide noventa grados y por ende la medida de los otros dos ángulos son menores de noventa grados. El lado opuesto al ángulo recto de este polígono se llama hipotenusa y los otros dos lados son llamados catetos.

1.5 TEOREMA DE SENO Y COSENO.

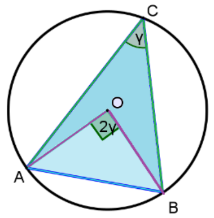
Teorema del Seno

Para llegar al teorema del seno se retomará la proposición 20 del libro III de los Elementos de Euclides donde se enuncia: En un círculo el ángulo en el centro es el doble del ángulo en la circunferencia, cuando los ángulos tienen la misma circunferencia como base.

Para tener mayor claridad del enunciado nos apoyaremos en la Figura 26 donde se observa que un ángulo inscrito en un círculo es igual a la mitad del ángulo central que subtiende la misma cuerda a lo cual Montalvo agrega:

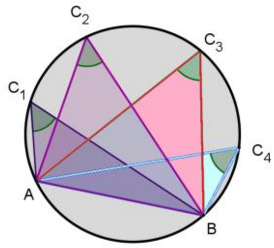
> Dos corolarios de este teorema inmediatamente se siguen: (1) En un círculo dado, todos los ángulos inscritos subtienden la misma cuerda son iguales esto es la Proposición 21 de Euclides, ver figura 27 y (2) Todos los ángulos inscritos que subtienden un diámetro son ángulos rectos, los cuales se presentaran en la figura 28. Este último resultado se dice que había sido demostrado por Tales (aunque los babilonios ya lo habían conocido mil años antes que él) y puede ser uno de los primeros teoremas que se ha probado en la historia. (2012, p.53)

Figura 26. Proposición 20 del libro III de los Elementos de Euclides.



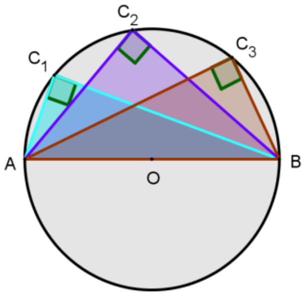
Fuente: Adaptada de Montalvo, A. (2012). *Historia de la trigonometría y su enseñanza.* Benemérita Uniersidad Autónoma de Puebla, Mexico.: Tesis para obtener el título de: Licenciada en matemáticas (p.53).

Figura 27. Proposición 21 del Libro III de los Elementos de Euclides.



Fuente; Adaptada de Montalvo, A. (2012). *Historia de la trigonometría y su enseñanza.* Benemérita Uniersidad Autónoma de Puebla, Mexico.: Tesis para obtener el título de: Licenciada en matemáticas (p.54)

Figura 28. Todos los ángulos inscritos que subtienden un diámetro son rectos.

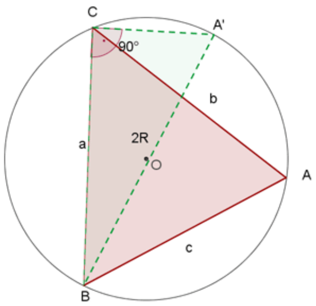


Fuente: Adaptada de Montalvo, A. (2012). *Historia de la trigonometría y su enseñanza.* Benemérita Uniersidad Autónoma de Puebla, Mexico.: Tesis para obtener el título de: Licenciada en matemáticas (p.54)

Dado lo anterior se puede pasar a mencionar el teorema del seno el cual se define como los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Por ende si te tiene el triángulo $\Delta\, ABC$ donde a, b y c son las longitudes de los respectivos ángulos $A, B\ y\ C$ y para conocer todos los elementos del respectivo triángulo mediante este teorema se debe conocer dos lados y un ángulo opuesto o dos ángulos y cualquier lado, y se representa de la siguiente manera como se muestra en la Figura 29.

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

Figura 29. Representación gráfica del teorema del seno.



Fuente: http://www.ditutor.com/trigonometria/ley_seno.html

Teorema del Coseno

El teorema del coseno define que en un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman. Si se tiene el triángulo $\Delta\, ABC$ donde a, b y c son las longitudes de los respectivos ángulos $A, B\ y\ C$ entonces:

$$a^2 = \ b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C$$

La importancia del teorema del coseno es que nos permite encontrar la longitud de cualquier triangulo, teniendo en cuenta lo anterior Mateus concluye:

> Este teorema permite calcular la medida de un lado cualquiera de un triángulo, conocida las medidas de los otros lados y el ángulo formado entre ellos. También, conocida la longitud de los lados, se puede hallar la medida de cualquier ángulo interior del triángulo (2012, p. 42).

Para finalizar este capítulo se mostrará brevemente la trigonometría en cuanto a las funciones y como hace parte del cálculo.

Actualmente las razones trigonométricas son tema de discusión en los cursos de trigonometría en relación con los problemas diversos que relacionan los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, también están las funciones trigonométricas que son de mucha importancia tal como lo afirma Apostol (1984) en Cálculo, no sólo por la relación de los lados y los ángulos de un triángulo, sino por las propiedades que poseen como funciones.

Suponemos que el lector conoce las 6 razones trigonométricas seno, coseno, tangente, secante, cosecante, cotangente y sus inversas arco seno, arco coseno, arco tangente, entre otras, así como las funciones de cada una de las anteriormente escritas las cuales tienen en común una propiedad llamada periodicidad. De lo anterior Apostol menciona:

Una función f es periódica con periodo $p \neq 0$ si su dominio contiene $x + p$ siempre que contenga x y si $f(x + p) = f(x)$para todo x del dominio de *f*. Las funciones seno y coseno son periódicas de periodo 2π, siendo π el área de un disco circular unidad (1984, p.117)

Propiedades fundamentales del seno y del coseno

Cuando se trabaja con seno y coseno es importante tener en cuenta sus definiciones como sus propiedades las cuales hace referencia Apostol (1984) a continuación.

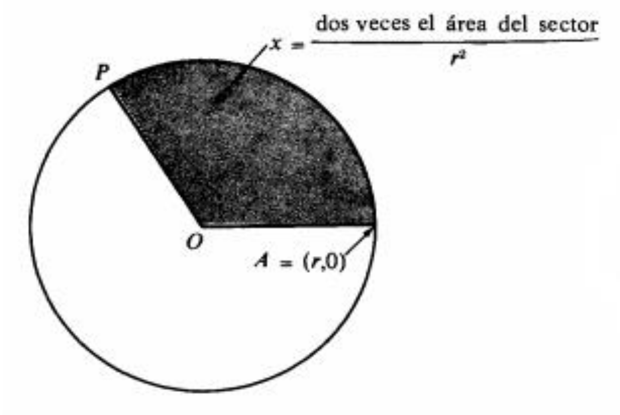
1. Dominio de definición. Las funciones seno y coseno están definidas en toda la recta real.
2. Valores especiales. Tenemos $\cos 0 = sen\ \frac{1}{2}\pi = 1, cos\pi = -1$.
3. Coseno de una diferencia. Para *x* e *y* cualesquiera, tenemos $\cos(y - x) = cosycosx + senysenx$.
4. Desigualdades fundamentales para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, se tiene $0 < cosx < \frac{senx}{x} < \frac{1}{cosx}$

Ahora se realizará una descripción geométrica de las funciones seno y coseno y se dará una interpretación de las propiedades fundamentales citadas anteriormente.

Consideremos una circunferencia de radio r y de centro en el origen y designaremos al punto $(r, 0)$ por A y sea P cualquier otro punto de la circunferencia, para complementar la idea Apostol asegura:

Los dos segmentos rectilíneos OA y OP determinan una figura geométrica llamada ángulo que representamos con el símbolo $\angle AOP$. Un ejemplo se representa en la siguiente Figura 30. Es preciso asignar a este ángulo un número real no negativo x que puede usarse como medida de su magnitud. El método más corriente para hacerlo es tomar una circunferencia de radio 1 y llamar x a la longitud del arco AP, descrito en el sentido contrario de las agujas del reloj de A a P, y decir que la medida de $\angle AOP$ es x radianes (1984, p.126)

Figura 30. Un ángulo ∠AOP de x radianes, lo que corresponde a una descripción geométrica de la función seno y coseno.

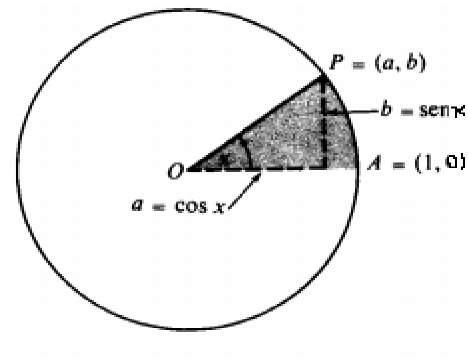


Fuente: (Apostol. 1984) *Calculus* (2 ed., Vol. 1). España: Reverté, S. A (p. 126)

El siguiente paso, es definir el seno y el coseno de un ángulo para lo cual Apostol expone:

> Consideremos un número x tal que $0 < x < 2\pi$ y sea P el punto de la circunferencia unidad tal que el área del sector AOP sea igual a $\frac{x}{2}$ Sean (a, b) las coordenadas de P en la Figura 31 se representa un ejemplo. Los números $a\ y\ b$ están completamente determinados por x. (1984. p. 126)

Figura 31. Descripción geométrica de senx y cosx.



Fuente: (Apostol. 1984) Calculus (2 ed., Vol. 1). España: Reverté, S. A (p. 126)

De esta manera el seno y el coseno se define $cosx = a\ , senx = b$ dicho de otra manera $cosx$ es la abscisa de P y $senx$ es su ordenada. Por ejemplo cuando $x = \pi$ tenemos a P (-1,0) de modo que $cos\pi = -1$ y $sen\pi = 0$ de esta forma con este procedimiento el seno y el coseno se dan como funciones definidas en el intervalo abierto (0, 2π)

Por ultimo las otras funciones trigonométricas se definen ahora en función de seno y coseno mediante:

$$tanx = \frac{senx}{cosx}, \quad cotx = \frac{cosx}{senx}, \quad secx = \frac{1}{cosx}, \quad cscx = \frac{1}{senx}$$

Estas funciones están definidas para todo real *x* salvo en puntos donde el denominador puede ser cero.

Después de este recorrido por la historia y de recopilar información pertinente para la implementación de la experiencia de aula, se necesitará analizar los momentos por los cuales los estudiantes muestren sus ventajas y/o desventajas de realizar una actividades de tipo geométrico, trigonométrico e histórico, y para ello se hará uso de elementos didácticos y curriculares como se muestra en el capítulo posterior.

CAPÍTULO II: ASPECTOS DIDÁCTICOS Y CURRICULARES DE LA INVESTIGACIÓN

En Didáctica de la Matemáticas se aplican análisis didácticos[10], para identificar y caracterizar una serie de fenómenos concernientes al proceso de enseñanza y aprendizaje en el contexto escolar. Por consiguiente, el fenómeno didáctico a trabajar en esta investigación es aquel relacionado con la razón trigonométrica y los aspectos más transcendentales de su historia, reconociendo así, la importancia de esta noción matemática en el currículo escolar de la educación media, y como base para la educación superior. En relación con lo anterior, en este capítulo se amplían algunos de los elementos teóricos seleccionados para fundamentar la problemática de este trabajo de investigación, desde dos perspectivas: la dimensión didáctica y la dimensión curricular.

2.1.DIMENSIÓN DIDÁCTICA.

En lo referente a la dimensión didáctica el documento de base será: el desarrollo del pensamiento trigonométrico en Montiel (2013). Dado que el texto presenta una herramienta en innovación sobre algunos de los fenómenos que rodean al estudiante frente al concepto matemático desarrollado en este trabajo de grado, es decir las razones trigonométricas.

[10] Gómez (2002). Lo define como la conceptualización de las actividades que el profesor de matemáticas debería realizar para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. es, en general, apropiado para la planificación global de una asignatura o un plan de estudios, a su vez este caracteriza por su especificidad a un concepto matemático concreto. Solamente cuando se profundiza en esa especificidad, es posible reconocer los múltiples significados del concepto. (p.257)

2.1.1. Desarrollo del pensamiento trigonométrico en Montiel (2013).

La autora referenciada, documenta que por la necesidad de descubrir cuáles son los conocimientos que logra interpretar un estudiante, se hace necesario estudiar e indagar sobre los distintos métodos de enseñanza que permiten llegar a ese objetivo; para ampliar esta idea, Montiel lo manifiesta en su investigación cuando:

> …después de identificar las dificultades, concepciones o niveles de comprensión entre los estudiantes, algunas investigaciones cierran con una discusión sobre la pertinencia de utilizar los métodos del "triángulo rectángulo" y del "círculo unitario" con la intención de introducir las razones trigonométricas. (2013, p. 19).

De Kee, Mura y Dionne, (Citado por Montiel 2013) efectuaron una investigación alrededor de las diversas interpretaciones que logran hacer los estudiantes frente a este objeto matemático a trabajar y concluyen que para favorecerlo hay que dar más importancia a todas las ramas que representan un concepto matemático.

No obstante, el aporte de Montiel (2013) es el énfasis que se hace, a que el estudiante pueda contextualizar las razones trigonométricas con grandes construcciones, sistema de navegación entre otras aplicaciones, alrededor de la resolución de problemas y los conceptos trigonométricos involucrados. Por tal razón, para esta experiencia de aula, se busca darle significado mediante actividades de medición y modelación, los cuales se adaptan a un modelo propuesto por Montiel (2013) en su texto el desarrollo del pensamiento trigonométrico, realiza una descripción de un sistema educativo en particular para plantear desde ahí la problemática identificada y estudiarla desde distintas perspectivas en la disciplina didáctica. El objetivo principal de este escrito es compartir con los lectores los resultados de la investigación e innovación educativa relacionadas con la trigonometría para problematizar lo que se enseña y de esta forma, se plantean elementos para innovar la práctica educativa desde la reorganización del saber matemático escolar mismo y no sólo desde la práctica pedagógica.

Por otro lado, en Montiel (2005) en su tesis doctoral, se hace un planteamiento sobre que, no solo basta con reconocer cuales son las dificultades que se le presentan al estudiante si no como estas se encuentran directamente relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje; puesto que desde su enfoque *Socioepistemologico*[11] se problematiza a la matemática y desde ahí se logra dar una explicación más amplia del porqué ciertas dificultades o porqué el avance de algunas innovaciones didácticas, independientemente del enfoque pedagógico que subyace a la práctica educativa. Así mismo, Montiel (2013) hace referencia que desde esta teoría surge la necesidad de examinar la naturaleza de cada saber matemático y su escenario histórico, para este caso en particular el conocimiento trigonométrico.

De esta manera, se identifica la evolución de los conceptos trigonométricas en relación con las circunstancias histórico-sociales manifestando así la coherencia que debe existir entre la apropiación de los conceptos matemáticos, es efectivamente una vía para que el estudiante use elementos geométricos para trabajar, integrar y contextualizar conceptos dentro y fuera de las matemáticas mismas.

[11] La Socioepistemología promueve una muy particular forma de estudiar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las Matemáticas: abandona una tradicional mirada centrada en objetos hacia otra centrada en prácticas que es guiada por el constructo teórico de práctica social. *Véase en AIEM (2015, p.10).*

Por esta razón, Montiel (2005) y (2013) propone una construcción basada en prácticas sociales, las cuales caracterizan al conocimiento como el fruto entre la *epistemología*[12] y el contexto lo que implica que no sólo se enfatice en conceptos, poniendo énfasis a la construcción de la relación y la funcionalidad trigonométrica y sus respectivos desarrollos del pensamiento *geométrico-proporcional* y *analítico funcional*; en contraste con la visión tradicional sobre el aprendizaje de la razón. Por tanto se usan elementos que fundamentan el uso y la significación de las herramientas trigonométricas para una construcción articulada de las razones trigonométricas mediante la anticipación y la predicción.

Dado lo anterior vale la pena aclarar que muchos de los términos usados en esta dimensión son propios del marco teórico referido y como el trabajo de grado presente se encuentra inmerso en la educación colombiana, se asume desde lo que se denomina pensamiento geométrico y pensamiento variacional para el caso de los pensamiento planteados con anterioridad "*geométrico-proporcional* y *analítico funcional"*, así como el significado de practica social el cual Arrieta (Citado por Montiel) señala:

> …el Concepto de "practica" connota hacer algo, pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido la práctica siempre es una práctica social. (2005, p. 102)

Para ampliar, en Montiel (2005) se ha propuesto un modelo a la construcción del conocimiento[13] trigonométrico basado en tres momentos: anticipación, predicción y

[12] La palabra epistemología tiene su origen en las raíces griegas ἐπιστήμη (episteme) que significa conocimiento, γλόγος (logos) que significa teoría. La epistemología es, por tanto, la teoría del conocimiento. De algún modo, puede decirse que es una abstracción o análisis filosófico sobre la ciencia y sobre la adquisición de su

[13] Construcción del conocimiento: un conjunto de reflexiones, análisis y estudios acerca de los problemas suscitados por los conceptos, métodos, teorías y desarrollo de las ciencias. *Véase en González (2013, p. 23)*

formalización. El nombre de cada momento obedece a la práctica social que regula aquellas actividades asociadas a las actividades de referencia, que le dan uso y vía de construcción a las nociones trigonométricas en su contexto de origen.

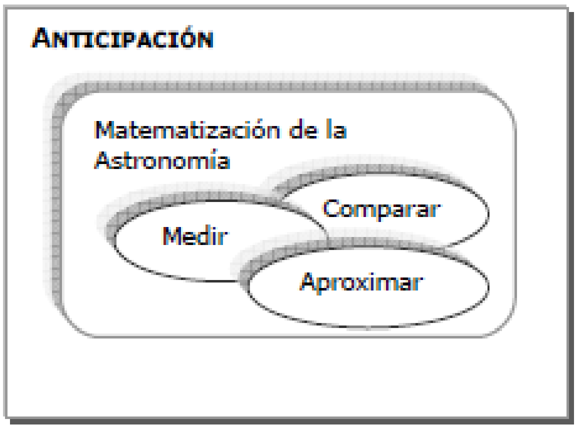
La anticipación

Este primer momento hace referencia al estado inicial de conocimiento del estudiante, haciendo referencia la forma intuitiva para representar e interpretar el cosmos y el contexto. Por ello Montiel lo define como:

> En el primer periodo histórico se identifica a la anticipación como la práctica social que regula las actividades asociadas a la *matematización de la astronomía*. Ya sea para la predicción o la explicación de fenómenos celestes, era necesario que éste sucediera para estar en condiciones de comprobar el dato y, a la vez, el modelo; la matematización, numérica o geométrica, orientaba las decisiones prácticas de la agricultura, el comercio o la navegación, del mismo modo que guiaba las explicaciones teóricas de la astronomía o la geografía. (2013. p. 24)

A continuación la figura 1 presentada en Montiel, se hace visible gráficamente como está representada la anticipación

Figura 32. Esquematiza el modelo de la anticipación constituido por la matematización de la astronomía



Fuente: Montiel (2005) Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. México, CICATAIPN Unidad Legaría México: Tesis de doctorado no publicada. (p.104)

En este sentido, la anticipación se centra en una evolución de la matematización de los fenómenos naturales y astronómicos, donde se ponen en juego conceptos, como la proporción, relación, distancias, entre otros; la cuales son relevantes en la construcción de los modelos trigonométricos. Montiel (2007) caracteriza a esta actividad matemática la cual radica en medir, contrastar, comparar, aproximar y calcular eventos relacionados con fenómenos astronómicos para represéntalos en modelos geométricos proporcionales donde puedan anticipar un hecho real. De esta forma, la anticipación en el discurso matemático escolar debe reconciliar el estudio de la trigonometría con el estudio de la proporcionalidad, donde objetos como el triángulo, el círculo, el ángulo y las relaciones entre ellos sean herramientas en la construcción de modelos geométricos.

En efecto, un discurso escolar constituido por la anticipación debe considerar las actividades del estudiante (medición, comparación, aproximación, entre otros) como la vía para descubrir relaciones proporcionales en su realidad, mediada por las situaciones problema que el profesor organice para la construcción de los conceptos trigonométricos asociados.

En definitiva, para este trabajo de grado el concepto de razón se encuentra en todo el proceso educativo de la trigonometría y resulta entonces más apropiado estudiar y analizar los resultados desde una perspectiva donde se retome y se rescate, lo abstracto, lo geométrico, así mismo, lo variacional, es decir, ver el estudio trigonométrico como un conjunto de saberes que satisface contextos, problemas y circunstancias particulares y no solo a estructuras matemáticas que dan coherencia a su presentación como objeto matemático formal.

A continuación se presenta en el concepto de predicción, y esta hace alusión al momento donde el estudiante se aleja un poco de lo abstracto y categoriza al conocimiento por las herramientas adquiridas en los procesos académicos.

La predicción

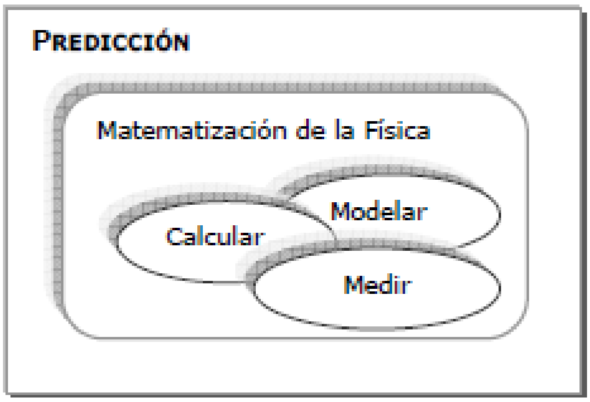
Este segundo momento hace referencia a los diversos conocimientos del estudiante, haciendo referencia la forma cuantitativa y cualitativa para representar e interpretar el cosmos y el contexto. Por ello que Montiel lo define como:

> La predicción es la necesidad de conocer un estado futuro con base en el presente y las variaciones de su pasado, se reconoce como la práctica social que regula las actividades

asociadas a esta *matematización de la física*[14], y el paso del fenómeno celeste al modelo mecánico constituye una vía de transición de lo geométrico al plano funcional. (2013. P. 26).

A continuación la figura 2 presentada en Montiel, se hace visible gráficamente como está representada la anticipación

Figura 33. Esquematiza el modelo de la predicción constituido por la matematización de la física.



Fuente: Montiel (2005) Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. México, CICATAIPN Unidad Legaría México: Tesis de doctorado no publicada. (p.106)

De esta manera, la predicción se centra en el desarrollo de nuevas herramientas trigonométricas donde traten con objetos que surgen o toman un carácter matemático en el estudio del movimiento y el cambio, para las cuales Montiel (2005) manifiesta que es necesaria una concepción *matematizable del movimiento*, es decir, concebir al movimiento en términos abstractos como (figuras y números) y a su vez el asociar varios conceptos matemáticos guardando así la relación trigonométrica requerida para este trabajo de grado donde se fundamente la modelación y la medición.

[14] Montiel (2005) entiende que desde siglo xvi al siglo xvii se da una emergencia conjunta de los conceptos físicos y los conceptos matemáticos, donde autores como *De Gandt (1999)* reconocen al estudio del movimiento y de las velocidades como lo que introduce a los problemas y del cálculo infinitesimal.

Es claro que la problemática de este trabajo de grado y a su vez su desarrollo no está en el contexto de la física, pero la esencia de lo que plantea Montiel 2013 y 2005 sobre las herramientas que se deben de tener en cuenta, para la construcción de un concepto trigonométrico, si corresponde con el objetivo planteado para el desarrollo.

Por consiguiente, los trabajos realizados por Montiel (2013) se centran en el desarrollo de la teoría newtoniana para apoyarse en el concepto de predicción al reconocer el contexto *dinámico* con que se tratan tanto los fenómenos como los objetos matemáticos. De esta forma, explica como Newton integra en una sola teoría las primeras leyes matemáticas que describen, el movimiento celeste de Kepler, con las leyes del movimiento terrestre elaboradas por Galileo; y todo esto a partir de la interpretación de los objetos geométricos como entidades generadas por un movimiento continuo, seguido por un tratamiento de las ecuaciones algebraicas que anticipaban una noción matemática.

A partir de lo referenciado, en este trabajo no se pretende que los estudiantes reproduzcan de lo sucedido en la historia, sino que realicen una reconstrucción de las condiciones tales como: la interacción matemática de la experiencia planteada; el concepto de razón debe emerger de manera natural a partir de la necesidad de su utilización, para ello es necesario enfrentar a los estudiantes a actividades donde a partir del uso de la geometría, la proporción, la relación y la medición se llegue a la comprensión del objeto trigonométricos. Lo anterior tiene la intención de aportar al desarrollo del pensamiento trigonométrico; y para ello se usan actividades de aula, donde estas incorporan un sentido histórico como un facilitador del aprendizaje de la trigonometría, pues debido a las diferentes posibilidades de exploración que ésta ofrece puede contribuir a la comprensión y al desarrollo de conceptos y habilidades propios de las matemáticas.

En definitiva, Montiel (2005) concluye como este marco teórico ha permitido explicar las dificultades del estudiante al reconocer que la introducción a la trigonometría a través del estudio del triángulo rectángulo despoja a las razones trigonométricas de todo aquello que le da origen, sentido y significado; es decir, hay una pérdida del proceso geométrico en la construcción de lo trigonométrico. Así mismo, El *discurso Trigonométrico Escolar* ha convertido a las razones trigonométricas en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, esto es, en una técnica para encontrar valores faltantes de un triángulo. En ese sentido, se entiende que los resultados positivos en las investigaciones plantadas se deben en gran medida a devolverle a lo trigonométrico esas condiciones que le son propias.

2.2. DIMENSIÓN CURRICULAR.

En esta dimensión se tendrán como referente el currículo nacional colombiano establecido legalmente en los Lineamientos Curriculares de matemáticas MEN (1998) los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN (2006) adicional a esto los derechos básicos de aprendizaje por sus siglas denominado DBA (2015) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional. Es importante indicar que los currículos propios de la Institución Educativa también son objeto de análisis para esta sección, con el fin de caracterizar todos los aspectos relevantes para la experiencia de aula.

2.2.1. Lineamientos Curriculares MEN (1998).

Los Lineamientos Curriculares son una propuesta del Ministerio de Educación Nacional, que plantean algunos criterios para orientar el currículo, así mismo una visión global e integral sobre el que hacer matemático dentro del aula y proponen organizar los enfoques que debería tener la enseñanza de las matemáticas en el país, con el fin de que se estudie la fundamentación pedagógica de esta área y se intercambien experiencias en el contexto de los Proyectos Educativos Institucionales.

Por otro lado, el MEN (1998) plantea tres grandes aspectos donde cada uno de ellos se encuentra situado en un eje tridimensional, estos son:

Los procesos generales y se encuentran relacionados con el aprendizaje, tales como razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración; comparación y ejercitación de procedimientos.

Conocimientos básicos, los cuales relaciona con los conceptos específicos de la matemática y que están organizados en cinco niveles de pensamiento: pensamiento numérico y los sistemas numéricos, pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas métricos, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos y el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

El contexto, hace alusión a los ambientes que rodean al estudiante y que contribuyen al sentido de las matemáticas que aprende, en el contexto se ponen en juego las situaciones problema que surgen de las matemáticas mismas , de la vida diaria y de los roles sociales, culturales, económicos entre otros.

A partir de estos aspectos, se explican de algunos de los procesos relativos a las razones trigonométricas que deben tomarse en consideración, para el diseño y la gestión de experiencias de aprendizaje que se proponen en este trabajo de grado, como se muestra a continuación.

En cuanto a los conocimientos básicos, se tienen en cuenta lo relativo al pensamiento espacial y los sistemas geométricos;

El pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial

> Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor, que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc., (1998, p. 37)

Acerca de los procesos generales: Se tiene en cuenta la resolución y planteamiento de problemas al igual que la modelación matemática, como se muestra a continuación respectivamente.

Resolución y planteamiento del problema, le permite al estudiante alcanzar metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento matemático y a su vez el proceso de “desarrollar habilidades para comunicarse matemáticamente: expresar ideas, interpretar, evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas”. (MEN, 1998, p. 76). Así mismo, este proceso general indaga sobre la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos a través de traducción entre distintas formas de representación, identificación de propiedades y el reconocimiento de condiciones, ejecución eficiente de procesos y verificación de resultados de un proceso.

La modelación matemática, vista como proceso, involucra una serie de acciones o fases que hacen que la construcción o interpretación de un modelo matemático no se efectúe de manera instantánea en el aula de clase; esas acciones o fases se conocen en como los elementos básicos, “propuesta por el matemático *holandés Hans Freudenthal,* quien considera que el núcleo básico del currículo de matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de las estrategias de matematización” (MEN. 1998. p.76)

El punto de partida de la modelación es una situación problemática real seguido por el proceso de resolución de problemas, y la coherencia interna en la cual se da un modelo matemático. El MEN (1998) plantea que cuando se consigue un modelo satisfactorio, éste se puede utilizar como base para hacer predicciones acerca de la situación problemática real u objeto modelado, para tomar decisiones y para emprender acciones. La capacidad de predicción que tiene un modelo matemático es un concepto poderoso y fundamental en las matemáticas, este hecho se presume cuando:

> Algunos autores distinguen entre la modelación y la matematización mientras que otros las consideran equivalentes. Nosotros consideramos la matematización como el proceso desde el problema enunciado matemáticamente hasta las matemáticas y la

> modelación o la construcción de modelos como el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático. (1998. p. 77)

Los procesos descritos anteriormente en ambos ejes, se deben tener en cuenta en el momento del diseño de esta experiencia de aula, puesto que se espera favorecer académicamente al grupo de estudiantes seleccionados a partir de actividades, que incentiven en ellos procesos de investigación donde apliquen nociones de medidas, modelación, calculo, proporción y así mismo que puedan formular y demostrar hipótesis, entre otros. En particular una de las situaciones propuestas en este trabajo consiste en la resolución de un problema que conlleva a la construcción del concepto de razón trigonométrica donde los estudiantes deben dar cuenta de los fenómenos hallados en éste.

2.2.2. Estándares Básicos en Competencias Matemáticas MEN (2006).

Los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional de la Republica de Colombia, se presenta como una guía que permite promover y orientar los procesos curriculares, en aspectos esenciales de la reflexión matemática como son, el plan de estudios, los proyectos escolares e incluso el trabajo de enseñanza de las matemáticas en el aula; y de esta forma ser implementados en cada institución educativa de la nación sea privado o público, generado así, unanimidad en los conceptos presentados en las diferentes aulas de clase, de acuerdo a las necesidades curriculares y pedagógicas . En esta dimensión se encontrará algunos procesos generales presentes en actividad matemática la cual involucre trigonometría, y se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y en los cinco tipos de pensamiento matemático.

En este sentido, el encontrar conceptos que involucren razones trigonométricas concretamente no será posible, puesto que no está detallada como tal, porque el marco teórico del currículo mencionado gira alrededor de las competencias matemáticas y los estándares y no de los contenidos, por eso es necesario inferir en qué tipo de pensamiento y ciclos están inmersos estos conceptos.

A continuación, en la siguiente tabla se identifican los estándares trigonométricos esenciales en la construcción de las razones trigonométricas como lo son la medida de ángulos en los primeros grados de escolaridad, posteriormente se resaltan componente trigonométricos, todo esto con base a la tabla que postulan los lineamientos.

Tabla 3. Estándares Básicos en la construcción del concepto de razones trigonométricas.

Grado de Escolaridad	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
4 a 5		• Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo a sus componentes (ángulos y vértices) y características.			

		• Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámica.			
6 a 7		• Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y de arte • Resuelvo y formulo problemas usando modelos	• Diferencio y ordeno en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficie, dados volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes: pesos y masa de cuerpos solidos; duración de eventos o procesos amplitud de ángulos		

		geométricos. • Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones Visuales.			
8 a 9		• Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos	• Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.		

		(Pitágoras y Tales). • Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. • Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.			

Fuente: Adaptada de los Estándares Básicos de competencias en matemáticas MEN (2006)

La tabla anterior caracterizada a partir los Estándares Básicos de competencias en matemáticas MEN (2006), expresa un vía para construir el concepto de razón trigonométrica teniendo en cuenta cómo en él se presentan los procesos desde los primeros grados de escolaridad permitiendo que se evidencien aspectos de comparación, representación y uso de medidas en los triángulos y circunferencias, y para el caso de la esta experiencia de aula se toma en consideración la relación entre los lados de un triángulo, los ángulos, la longitud de arco, la semejanza de triángulos de manera muy particular para realizar el respectivo análisis.

2.2.3. Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)

A continuación se presentara una descripción de lo que plantea en Ministerio de Educación Nacional por sus siglas MEN sobre los Derechos Básicos de Aprendizaje por sus siglas DBA para los años (2015-2016) primera versión y (2016-2017) segunda versión.

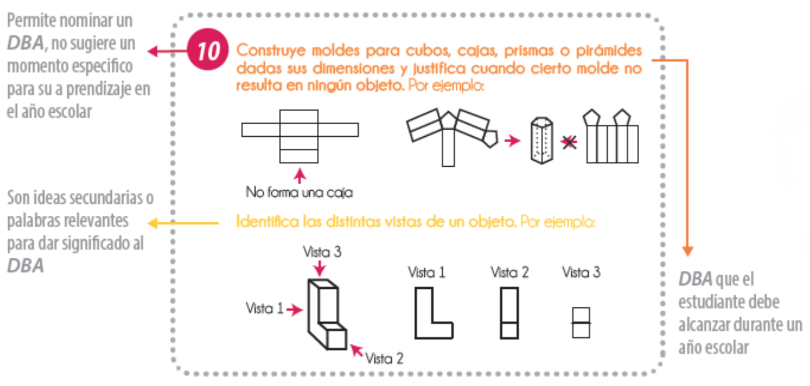
> El Ministerio de Educación Nacional ha venido trabajando en distintas estrategias y herramientas que conlleven al mejoramiento de la calidad educativa del país y que sean útiles en los establecimientos educativos. “Una de estas herramientas son los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) dirigidos a todos los actores del sector educativo para que identifiquen lo que es indispensable que aprendan los estudiantes y se desarrollen las acciones que sean necesarias para garantizarlo” (DBA. 2015. p. 3)

Para la comodidad del lector cuando se hable del MEN (2015) será en referencia a la primera versión y MEN (2016) para la segunda versión. Es importante resaltar que el objetivo de ambas versiones es el mismo, el cambio entre ellas se encuentra en la estructura de sus saberes.

Los DBA en matemáticas MEN (2015) conforman una propuesta de saberes fundamentales y significativos que al anexar como objeto de enseñanza garantizan condiciones de igualdad educativa; se estructuran guardando coherencia con Lineamientos Curriculares de matemáticas MEN (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN, (2006). Su importancia radica en que plantean elementos para la construcción de rutas de aprendizaje estructuradas para cada año lectivo cuyo fin es, que los estudiantes alcancen los estándares básicos propuestos y organizados por grado escolar desde 1º hasta 11º en las áreas de lenguaje y matemáticas.

De esta manera, los derechos básicos de aprendizaje tratan de orientan al docente sobre el desarrollo progresivo que debe de tener con los estudiantes en cada grado de escolaridad respecto a la construcción de sus conocimientos matemáticos. Así mismo, los (DBA, 2015) se manifiestan como un referente para la planeación de aula y su estructura se basa en una serie de listados los cuales se despliegan por problemas de aplicación donde estos caracterizan la clase de ejercicios que el estudiante debe estar en la capacidad de comprender y desarrollar durante un año escolar. A continuación en la siguiente Figura se muestra cómo se realiza esta estructura.

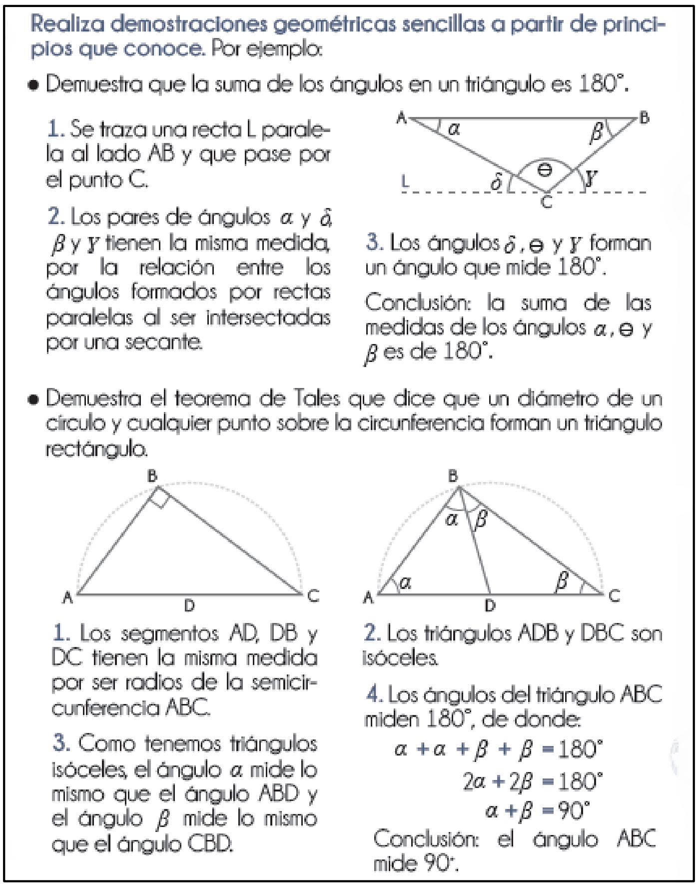
Figura 34. Esquematiza un ejemplo de cómo es la estructura de los derechos básicos de aprendizaje en matemáticas.



Fuente: Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2015. p. 4).

Ahora bien, para el caso de este trabajo de grado, los (DBA 2015) presentan una estructura de saberes fundamentales que el estudiante debe estar en la capacidad de interpretar, estos saberes se encuentran en torno a las razones trigonométricas, presentadas para el grado noveno de la educación media, dejando claro que en los grados posteriores modelan las unidades de trabajo para conceptos como el de funciones trigonométricas y estos no se tendrán en consideración para efectos de este trabajo. Es por esto que a continuación en la figura 35 se presentan los DBA correspondientes al desarrollo de las razones trigonometrías pertinentes.

Figura 35. Caracterización de los saberes para las razones trigonométricas.


Realiza demostraciones geométricas sencillas a partir de principios que conoce. Por ejemplo:

- Demuestra que la suma de los ángulos en un triángulo es 180°.

1. Se traza una recta L paralela al lado AB y que pase por el punto C.
2. Los pares de ángulos α y δ, β y γ tienen la misma medida, por la relación entre los ángulos formados por rectas paralelas al ser intersectadas por una secante.
3. Los ángulos δ, θ y γ forman un ángulo que mide 180°.

Conclusión: la suma de las medidas de los ángulos α, θ y β es de 180°.

- Demuestra el teorema de Tales que dice que un diámetro de un circulo y cualquier punto sobre la circunferencia forman un triángulo rectángulo.

1. Los segmentos AD, DB y DC tienen la misma medida por ser radios de la semicircunferencia ABC.
2. Los triángulos ADB y DBC son isóceles.
3. Como tenemos triángulos isóceles, el ángulo α mide lo mismo que el ángulo ABD y el ángulo β mide lo mismo que el ángulo CBD.
4. Los ángulos del triángulo ABC miden 180°, de donde:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$$
$$2\alpha + 2\beta = 180°$$
$$\alpha + \beta = 90°$$

Conclusión: el ángulo ABC mide 90°.

Responde a lo propuesto por el (MEN, 2015) para el grado noveno de la educación media, aquí se plantean una seria de preguntas y posterior a ello su respuesta, puesto que esto es un ejemplo que ilustra lo que se espera que el estudiante (p.31)

Así sucesivamente, los DBA presentan otros ejemplos correspondientes a las razones trigonométricas que pueden ser evaluados a gusto del lector, puesto que siguen bajo la misma distribución. La figura anterior, para efectos de esta experiencia de aula, manifiesta algunos de los conocimientos que debe tener el estudiante frente al teorema de tales, para que este pueda ser demostrado con los conocimientos previamente adquiridos como por ejemplo el Utilizar las razones seno, coseno y la tangente para solucionar problemas que involucran triángulos rectángulos, por otra parte, se hace conveniente el “Conocer las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos. Comprende que para un cierto ángulo α, las razones sen α, cos α son independientes de las medidas de los lados del triángulo” (MEN, 2015. p. 30).

2.3.PRESENTACIÓN DE LA INSTITUCIÓN.

En este apartado, se evidenciará una reseña histórica de la institución educativa donde se llevó a cabo la experiencia de aula acompañada de la misión y visión de la institución.

Reseña histórica de la Institución Educativa Sagrado Corazón de Jesús – Bethlemitas es una institución dirigida por las religiosas Bethlemitas dedicada a la formación integral de la niñez y la juventud.

El 8 de octubre de 1888 se fundó el Colegio en la ciudad de Palmira. Bajo la dirección de la hermana Rosa María Madariaga, el Colegio inició el bachiller clásico en el año 1943. Hasta ese momento se había trabajado con la capacitación técnico-comercial y la formación de normalistas. Fue en el año de 1949 cuando se otorgó la autorización de graduar las primeras bachilleres en esa modalidad.

El 20 de junio de 2007 se obtiene el certificado de SC 4665-1por el ICONTEC – IQNET bajo la norma ISO 9001:2000 en la presentación del servicio de educación formal en los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media académica.

2.3.1 Misión

Somos una comunidad educativa, dinámica, participativa y actualizada, que sirve a la iglesia con renovado compromiso evangelizador.

Acompañamos a nuestros estudiantes en un proceso de formación integral, mediante una educación de calidad fundamentada en valores humano-cristianos y en una sólida preparación académica.

Contamos con el amor de Dios manifestado en Jesús, en Belén y la Cruz; la experiencia pedagógica innovadora de nuestros fundadores, el Santo Hermano Pedro de San José Betancur y la Beata Madre María Encarnación Rosal; más de tres (3) siglos de presencia en América y ciento treinta y un (131) años en Colombia con una propuesta pedagógica que se enriquece constantemente.

2.3.2 Visión

A la luz de la Filosofía Bethlemita y de nuestra propuesta educativa, que integra ciencia, cultura y evangelio, formar hombres y mujeres dignas, fraternas, competentes, justas, solidarias, misericordiosas y comprometidas con la paz, capaces de liderar procesos de cambio en la familia y la sociedad, para una patria nueva y un mundo más humano.

Ahora se mostrará brevemente los propósitos del área de matemáticas en el Colegio Sagrado Corazón de Jesús – Bethlemitas los cuales están regidos a los lineamientos que plantea el Ministerio de Educación.

2.3.3 Propósitos del área

El currículo de matemáticas adoptado por la institución dentro de su plan de estudios debe cumplir los siguientes propósitos generales:

- Generar en todos los estudiantes una actitud favorable hacia las matemáticas y estimular en ellas el interés por su estudio.
- Desarrollar en los estudiantes una sólida comprensión de los conceptos, procesos, y estrategias básicas de las matemáticas e, igualmente, la capacidad de utilizar todo ello en la solución de problemas.
- Desarrollar en los estudiantes la habilidad para reconocer la presencia de las matemáticas en diversas situaciones de la vida real.
- Suministrar a los estudiantes el lenguaje apropiado que les permita comunicar de manera eficaz sus ideas y experiencias matemáticas.

- Estimular en los estudiantes el uso creativo de las matemáticas para expresar nuevas ideas y descubrimientos, así como para reconocer los elementos matemáticos presentes en otras actividades creativas.
- Retar a los estudiantes a lograr un nivel de excelencia que corresponda a su etapa de desarrollo.
- Generar los espacios y estrategias necesarias para la formación de seres capaces de adquirir, valorar y producir conocimientos científicos y humanos que les permitan afrontar las exigencias del mundo actual, propendiendo por una educación holística basada en el desarrollo de valores que fortalezcan el espíritu crítico y propositivo, el respeto por la diversidad cultural y religiosa y el manejo adecuado de los recursos naturales.

Marco Conceptual

Respecto a la organización de los conocimientos básicos se hace referencia en los Lineamientos y Estándares de calidad a los pensamientos y los organizadores que relacionan los procesos cognitivos de los estudiantes cuando se enfrentan en la actividad matemática a la construcción y uso de tópicos matemáticos específicos o cuando se enfrentan con los sistemas simbólicos y de representación característicos del conocimiento matemático. Estos organizadores son:

El pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medida, el pensamiento Variacional y los sistemas analíticos y el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos. Es de anotar que para la estructura de las pruebas se reorganizaran estos pensamientos en tres componentes: el numérico-variacional, el geométrico-métrico, y el aleatorio.

Numérico – Variacional

Está relacionado con la comprensión de los números y de la numeración, el significado del número, la estructura del sistema de numeración; el significado de las operaciones, la comprensión de sus propiedades, de su efecto y de las relaciones entre ellas; el uso de los números y las operaciones en la resolución, identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la variación inversa y al concepto de función.

Se considera fundamental el conocimiento del conjunto de los números reales, las propiedades de las operaciones, la densidad y la distinción entre números racionales e irracionales. Uno de los elementos centrales a considerar es la apropiación del concepto de función analizando variación y relaciones entre diferentes representaciones y su uso comprensivo a través de la modelación con funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas, abordar situaciones que requieran nociones intuitivas de aproximación del estudiante a la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos y no matemáticos.

Geométrico – Métrico

Involucra la construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones o representaciones materiales, más específicamente está ligado a la comprensión del espacio, al desarrollo del pensamiento visual, al análisis abstracto de figuras y formas en el plano y en el espacio a través de la observación de patrones y regularidades. Involucra el razonamiento geométrico, la solución de problemas significativos de medición, modelación, diseño y construcción. Relacionado además con la construcción de conceptos de cada magnitud (longitud, área, volumen, capacidad, masa), la comprensión de los procesos de conservación, la estimación de magnitudes, la apreciación del rango, la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos. El uso de unidades, la selección y uso de instrumentos, la comprensión de conceptos de perímetro, área, superficie del área, volumen.

Juega un papel importante el identificar propiedades de las curvas, resolver problemas en donde se usen propiedades de las cónicas, describir y modelar fenómenos periódicos usando relaciones y funciones trigonométrico y usar argumentos geométricos para formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

Aleatorio

Hace referencia a la interpretación de datos, al reconocimiento y análisis de tendencias, cambio, correlaciones, a las inferencias y al reconocimiento, descripción y análisis de eventos aleatorios. Más específicamente involucra la exploración, representación, lectura e interpretación de datos en contexto; el análisis de diversas formas de representación de información numérica, el análisis cualitativo de regularidades, de tendencias, de tipos de crecimiento, y la formulación de inferencias y argumentos usando medidas de tendencia central y de dispersión.

Se espera un manejo comprensivo de la información proveniente de los medios o de estudios diseñados en el ámbito escolar, que se describan las tendencias que se observen en conjuntos de variables relacionadas y usen comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación. Se espera que se interpreten conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos y que se resuelvan y formulen problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, con reemplazamiento).

2.3.4 Las competencias.

Comunicación

Está referida a la capacidad del estudiante para expresar ideas, interpretar, representar, usar diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones. Relacionar materiales físicos y diagramas con ideas matemáticas. Modelar usando lenguaje escrito, oral, concreto, pictórico, gráfico y algebraico. Manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas, utilizar variables y construir argumentaciones orales y escritas.

Razonamiento

Relacionado con el dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones. Justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema. Formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos. Generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente. Plantear preguntas.

Solución de problemas

Está ligada a formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de la matemática. Traducir la realidad a una estructura matemática. Desarrollar y aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas. Justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de la una respuesta obtenida. Verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema.

Por último, en las siguientes ilustraciones se presenta la malla curricular de grado décimo desde primer hasta tercer periodo, en el que se puede evidenciar, que en segundo periodo se trabajan los conceptos de razones trigonométricas las cuales serán de gran utilidad para esta experiencia en el aula.

Figura 36. Presenta la malla curricular de grado décimo, para el primer periodo constituida por la institución educativa Sagrado Corazón de Jesús.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="4">Colegio Sagrado Corazón de Jesús
Hermanas Bethlemitas – Palmira
Mixto
PROCESO: GESTIÓN PEDAGÓGICA-HOLÍSTICA
PLANTILLA PARA LA ELABORACIÓN DE LA MALLA CURRICULAR</td><td rowspan="2">ISO 9001 Icontec
CERTIFICADO N°SC 4665-1
IQNet</td></tr>
<tr><td colspan="2">VIGENTE DESDE
AGOSTO 19 DE 2016</td><td>VERSIÓN
08</td><td>CÓDIGO
FR-PH-03</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>PERIODO</td><td>GRADO</td><td>ÁREA Y/O ASIGNATURA</td><td>INTENSIDAD HORARIA SEMANAL</td><td>PROFESOR.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>Trigonometría</td><td>4</td><td>Luis Fernando Espinosa S.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>ESTÁNDAR:</td><td colspan="3">✓ Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.
✓ Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
✓ Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">COMPETENCIA LA QUE CORRESPNDE A CADA AREA</td><td>Comunicación, representación y modelación</td><td>Razonamiento y argumentación</td><td>Planteamiento y resolución de problemas</td></tr>
<tr><td>• Restringe el dominio de una función para que sea inyectiva.
• Grafica funciones pares e impares.</td><td>• Establece relación entre las diferentes representaciones de una función.
• Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones de las lineales cuadráticas, cubicas, exponenciales y logarítmicas.</td><td>• Resuelve situaciones que presentan información que se comporta como una función.
• Resuelve polinomios aritméticos respetando el orden de las operaciones.</td></tr>
<tr><td>COMPONENTE</td><td colspan="3">✓ Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>DESEMPEÑO</td><td>✓ Determina si una relación es función.
✓ Identifica los elementos de una función.
✓ Representa funciones en forma tabular, gráfica y algebraica.
✓ Identifica gráfica y analíticamente diferentes clases de funciones (lineales cuadráticas, cubicas, exponenciales y logarítmicas)</td></tr>
<tr><td>EJES TEMATICOS</td><td>Funciones y ángulos</td></tr>
<tr><td>CONTENIDOS</td><td>✓ Funciones
✓ Propiedades delas funciones
✓ Funciones de variable real
✓ Ángulos
✓ Triángulos</td></tr>
<tr><td>PROCESOS ESTRUCTURALES</td><td>✓ Proceso Cognitivo
✓ Proceso Comunicativo</td></tr>
</table>

Figura 37. Presenta la malla curricular de grado décimo, para el segundo periodo constituida por la institución educativa Sagrado Corazón de Jesús.

	Colegio Sagrado Corazón de Jesús **Hermanas Bethlemitas – Palmira** **Mixto** **PROCESO: GESTIÓN PEDAGÓGICA-HOLÍSTICA** **PLANTILLA PARA LA ELABORACIÓN DE LA MALLA CURRICULAR**			
	VIGENTE DESDE AGOSTO 19 DE 2016	VERSIÓN 08	CÓDIGO FR-PH-03	

PERIODO	GRADO	ÁREA Y/O ASIGNATURA	INTENSIDAD HORARIA SEMANAL	PROFESOR.
2	10	Trigonometría	4	Luis Fernando Espinosa S.
ESTÁNDAR:	✓ Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.			

COMPETENCIA LA QUE CORRESPNDE A CADA AREA	**Comunicación, representación y modelación**	**Razonamiento y argumentación**	**Planteamiento y resolución de problemas**
	• Justificar una u otra estrategia en la solución de un problema ubicado en el contexto de las funciones.	• Construir triángulos rectángulos para modelar algunas situaciones problema.	• Plantear y resolver problemas que involucren funciones trigonométricas en triángulos.
COMPONENTE	✓ Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos. ✓ Pensamiento Variacional y Sistema Algebraico		
DESEMPEÑO	Plantea y resuelve problemas que involucran triángulos rectángulos.		
EJES TEMATICOS	Gráficas de las funciones trigonométricas - Solución de triángulos rectángulos - Solución de triángulos oblicuángulos -Vectores		
CONTENIDOS	✓ Funciones trigonométricas ✓ Circunferencia unitaria ✓ Puntos de la circunferencia unitaria ✓ Definiciones de las funciones trigonométricas ✓ Funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales ✓ Razones trigonométricas para 30,45 y60 ✓ Ángulos complementarios ✓ Ángulos de referencia – ✓ Ángulos coterminales – ✓ Gráficas de sen, cos y tan - cot, sec y csc – ✓ Ángulo de elevación y de depresión– ✓ Ley de senos y de cosenos ✓ Área del triángulo ✓ Elementos de un vector ✓ Suma de vectores		
PROCESOS ESTRUCTURALES	✓ Proceso Cognitivo ✓ Proceso Comunicativo		

Figura 38. Presenta la malla curricular de grado décimo, para el tercer periodo constituida por la institución educativa Sagrado Corazón de Jesús.

	Colegio Sagrado Corazón de Jesús Hermanas Bethlemitas – Palmira Mixto PROCESO: GESTIÓN PEDAGÓGICA-HOLÍSTICA PLANTILLA PARA LA ELABORACIÓN DE LA MALLA CURRICULAR		
	VIGENTE DESDE AGOSTO 19 DE 2016	VERSIÓN 08	CÓDIGO FR-PH-03

PERIODO	GRADO	ÁREA Y/O ASIGNATURA	INTENSIDAD HORARIA SEMANAL	PROFESOR.
3	10	Trigonometría	4	Luis Fernando Espinosa S.

ESTÁNDAR:	✓ Reconozco y describo curvas y lugares geométricos.		
COMPETENCIA LA QUE CORRESPNDE A CADA AREA	**Comunicación, representación y modelación**	**Razonamiento y argumentación**	**Planteamiento y resolución de problemas**
	• Explicar situaciones concretas mediante representaciones gráficas y algebraicas. • Explicar situaciones concretas usando representaciones gráficas y algebraicas de cada una de las secciones cónicas.	• Interpretar el comportamiento de una ecuación en razón a un problema determinado. • Identificar las secciones cónicas y sus características en diferentes contextos de la vida real.	• Proponer modelos para el planteamiento y solución de problemas mediante ecuaciones trigonométricas • Proponer el planteamiento y solución de un problema mediante secciones cónicas en diferentes contextos de la vida real.
COMPONENTE	✓ Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos		
DESEMPEÑO	✓ Resuelve operaciones algebraicas con expresiones que involucran conceptos trigonométricos. ✓ Resuelve ecuaciones trigonométricas.		
EJES TEMATICOS	Identidades trigonométricas- Ecuaciones trigonométricas – Secciones cónicas		

CONTENIDOS	Concepto Simplificación de identidades Trigonométricas Demostración de identidades Lineales Ecuaciones trigonométricas. Cuadráticas Problemas de aplicación
PROCESOS ESTRUCTURALES	✓ Proceso Cognitivo ✓ Proceso Comunicativo

CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO, ACERCAMIENTO A LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL AULA.

En este capítulo se ponen en manifiesto las condiciones en las que se desarrolla el trabajo de campo, es decir, desde el enfoque de la investigación, seguido por la descripción y organización de cada una de las actividades, posterior a ello, se procede con la aplicación, el análisis de las implementaciones, las reflexiones finales y las conclusiones.

3.1. ENFOQUE CUALITATIVO.

Las investigaciones que tienen un enfoque cualitativo son aquellas que según (Herrera, 2008) extraen descripciones a partir de las observaciones que adoptan la forma de entrevistas, trabajos de campo, registros escritos de todo tipo, fotografías, grabaciones, artefactos entre otros medios que le permitan a la persona interactuar con un medio y obtener un resultado.

En lo correspondiente al desarrollo de este trabajo de grado, el enfoque cualitativo rescata el objetivo principal de la experiencia de aula al poner en manifiesto lo que se espera que realicen los estudiantes, cuando se enfrentan a ideas astronómicas, conceptos matemáticos y herramientas históricas para la construcción de un concepto. Alrededor de esto, Martínez propone que:

> La investigación cualitativa busca la comprensión e interpretación de la realidad humana y social, con un interés práctico, es decir con el propósito de ubicar y

> orientar la acción humana y su realidad subjetiva. Por esto en los estudios cualitativos se pretende llegar a comprender la singularidad de las personas y las comunidades, dentro de su propio marco de referencia y en su contexto histórico-cultural. Se busca examinar la realidad tal como otros la experimentan, a partir de la interpretación de sus propios significados, sentimientos, creencias y valores (2011, p.17).

En efecto, el enfoque cualitativo para docentes en ejercicio y en formación, le permite transformar el aula de clases, en un espacio donde el estudiante se le estimule sus competencias o habilidades para un buen aprendizaje.

A partir de lo anterior, para este trabajo de grado es relevante lo que presenta (Murillo, s. f) ya que manifiesta a la investigación cualitativa como una herramienta que permite principios teóricos, los cuales emplean métodos de recolección de datos, con el propósito de explorar las relaciones sociales y describir la realidad tal como la aprecian los correspondientes.

Dentro de las teorías señalas por (Murillo, s. f), para el desarrollo de las actividades en esta experiencia, se reflejaron las siguientes:

La fenomenología es la "relación que hay entre los hechos y fenómenos" (p. 3). Este principio teórico corresponde al momento cuando los estudiantes identificaran los elementos más pertinentes de la historia y perciben como la gran parte de los conceptos matemáticos son abstracciones de lo observado en la naturaleza.

La hermenéutica se encarga en “determinar el significado exacto de las palabras de un texto, mediante las cuales se ha expresado un pensamiento” (p. 3). Este principio teórico se contrasta con el momento donde los estudiantes identificaran el concepto de las razones trigonométricas seno y coseno, por medio de una actividad la cual está constituida por elementos históricos.

La interacción social es la “influencia social que recibe todo individuo” (p. 3) Este principio teórico se asemeja cuando los estudiantes emplean métodos de recolección de datos cuantitativos lo que implica que requiere de datos y resultados numéricos explícitamente, para obtener un resultado.

En general, el enfoque cualitativo logra orientar a los estudiantes, a realizar preguntas e hipótesis frente a los datos recopilados y de esta manera adquirir herramientas que le permitan la construcción de diversos conceptos matemáticos, a partir de los elementos históricos previamente estudiados. Igualmente, es importante presentar algunas de las características más relevantes sobre el enfoque cualitativo, y como estas se encuentran reflejadas en este trabo de grado; para ellos se tendrá en consideración lo expuesto por Herrera (2008) como por ejemplo:

- La investigación cualitativa no pretende demostrar teorías existentes, más bien busca generar teoría a partir de los resultados obtenidos.

- Presenta una perspectiva histórica y dinámica. El investigador estudia las personas y los grupos tratando de reconstruir y comprender su pasado, como el contexto y las situaciones presentes en los que se hallan.
- La investigación cualitativa produce datos descriptivos, trabaja con las propias palabras de las personas y con las observaciones de su conducta.

Por esta razón, se busca a través de este trabajo de grado adaptar y poner en práctica situaciones problema que permitan que los conceptos geométricos, trigonométricos e históricos sean puesto en práctica, con la intención verificar al igual que constatar las teorías didácticas en torno al aprendizaje de las razones trigonométricas seno y coseno.

3.2. ADAPTACIÓN E IMPLEMENTACIÓN DE LA EXPERIENCIA DE AULA

En esta sección, se presentan las descripciones de cada una actividades implementada en este proyecto de investigación clasificadas en fases de desarrollo, así mismo, la forma en la que los estudiantes la recibieron.

3.2.1 Implementación de la experiencia de aula.

Las actividades en el aula se llevan a cabo por medio de tres fases de desarrollo las cuales incluyen actividades de apertura, desarrollo y cierre como se muestra en la tabla 1. Posterior a ello se presenta la descripción de cada una.

Del mismo modo, la implementación se encuentra dirigida a estudiantes de décimo grado de la educación media de la Institución Educativa Sagrado Corazón de Jesús – Bethlemitas ubicada en el municipio de Palmira; donde para la primera fase la actividad se realizó a cada uno de los 28 estudiantes del grado décimo y para las fases 2 y 3 se escogieron 8 estudiantes de forma aleatoria para formar dos grupos de 4 personas.

A continuación en la tabla 1, se muestra un esquema de las 3 fases donde se caracteriza el nombre, el objetivo planteado, la duración y la modalidad de cada actividad inmersa en dicha fase.

Tabla 4. Diseño de las fases de desarrollo.

		Nombre	**Objetivo**	**Duración**	**Modalidad**
Fase 1	Actividad de apertura	Explora sobre tus conocimientos geométricos e históricos.	Identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes para realizar actividades de tipo geométrico e histórico.	3 Horas.	Individual
		¿Cómo medir el radio	Recrear el problema de Eratóstenes usando		

Fase 2	Actividad de desarrollo	de la tierra?	objetos matemáticos	2 horas	2 Grupos de 4 personas
Fase 3		Reconociendo las razones trigonométricas seno y coseno.	Reconocer las razones trigonométricas seno y coseno a partir de una experiencia de aula	45 Minutos.	2 Grupos de 4 personas

A continuación, se presenta la descripción de las 3 fases que se llevaron a cabo con los estudiantes dentro de las cuales en la primera se realizaron dos actividades de apertura donde la primera se encuentra dirigida a los 28 estudiantes de forma individual: la cual busca examinar algunos conceptos geométricos tienen los estudiantes de años escolares anteriores. Seguido de una segunda actividad de apertura la cual es de consulta donde los estudiantes indagan sobre algunos personajes históricos de la antigua Grecia que sirve para darle apertura a la segunda fase de desarrollo, donde se recrea una situación histórica, que a posteriori sirve para llegar a la última fase donde se realiza una actividad de cierre para presentarles a los estudiantes las razones trigonométricas seno y coseno a partir de una inquietud generada en la actividad de desarrollo inmersa en la fase 2.

3.2.2 Presentación de la fase 1.

Las actividades de apertura fueron consideradas para dar origen al desarrollo secuencial de las actividades en el aula, con el fin de recuperar saberes y opiniones de los estudiantes.

La primera actividad fue de tipo diagnóstica en donde a los 28 estudiantes se les indagó sobre diferentes conceptos geométricos observados en años de escolaridad anteriores, basado en los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas MEN (2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje MEN (2016), es importante resaltar que para ese momento a los estudiantes solo se les presentó la actividad de apertura sin realizar alguna introducción sobre el tema; con la intención de llegar al objetivo propuesto, establecido en el reconocer las fortalezas y debilidades de los estudiantes al presentar una actividad de tipo geométrico e histórico.

La metodología utilizada, para esta primera actividad se basó en que cada estudiante resolviera el taller que tiene como título: *"explora tus conocimientos geométricos e históricos"* y con los resultados obtenidos de este, se procede a plantear la segunda actividad de apertura, donde esta permitió conocer sobre algunos personajes relevantes como Tales, Eratóstenes e Hiparco. Al momento de terminar la búsqueda de la información, a los estudiantes se les dejo es espacio para opinar sobre los hallazgos que estos personajes realizaron.

El tiempo de duración para cada una de las actividades fue de una hora.

A continuación, se presentan la primera y la segunda actividad apertura, donde la primera es adaptada de los libros de Hipertexto Editorial Santillana (Rubiano & Salazar, 2010) para los grados sexto, séptimo, noveno; y la segunda es un búsqueda de información.

Actividad de apertura 1.

Esta actividad se plantea con el objetivo de identificar las fortalezas y debilidades, a partir de una prueba diagnóstica que busca al final potenciar conceptos geométricos al igual que lo conceptos matemáticos que tienen de años anteriores tales como describir y justificar procesos de medición de longitudes, tal como lo afirma los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) así mismo el "explicar propiedades de figuras geométricas que se involucran en los procesos de medición, justificar procedimientos de medición a partir del Teorema de Thales, Teorema de Pitágoras" (p.68) , proponer alternativas para estimar y medir con precisión diferentes magnitudes.

A continuación se muestra como a los estudiantes se les presentó la actividad que tuvo como título:

EXPLORA SOBRE TUS CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS E HISTÓRICOS.

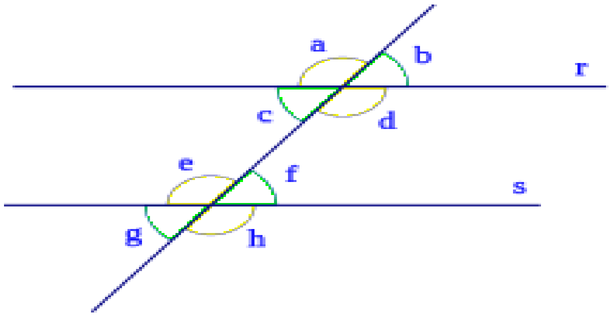
Lee con atención cada pregunta y responde de manera individual, en una hoja.

1. ¿Cuál es la fórmula para calcular el área y el perímetro de una circunferencia?

2. Dado lo anterior calcule el área y el perímetro para una circunferencia con las siguientes características:

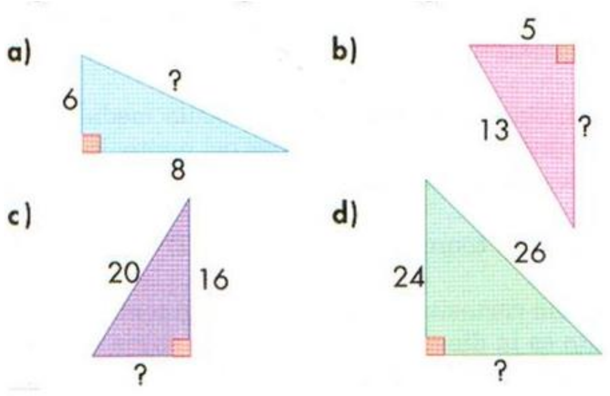
   a. Si el radio mide 10 cm
   b. Si el diámetro mide 25 dm

3. En la siguiente figura reconoce usted ¿qué ángulos son congruentes?

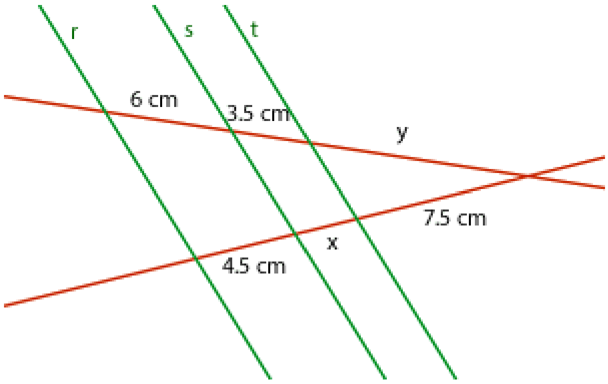


4. Enuncie el Teorema de Pitágoras

5. Encuentre la medida que falta de los siguientes triángulos



6. Calcular el valor de x e y para la siguiente figura



7. Pasar los ángulos 30°, 45° y 135° a radianes.

8. ¿Qué es razón y proporción?

Actividad de apertura 2.

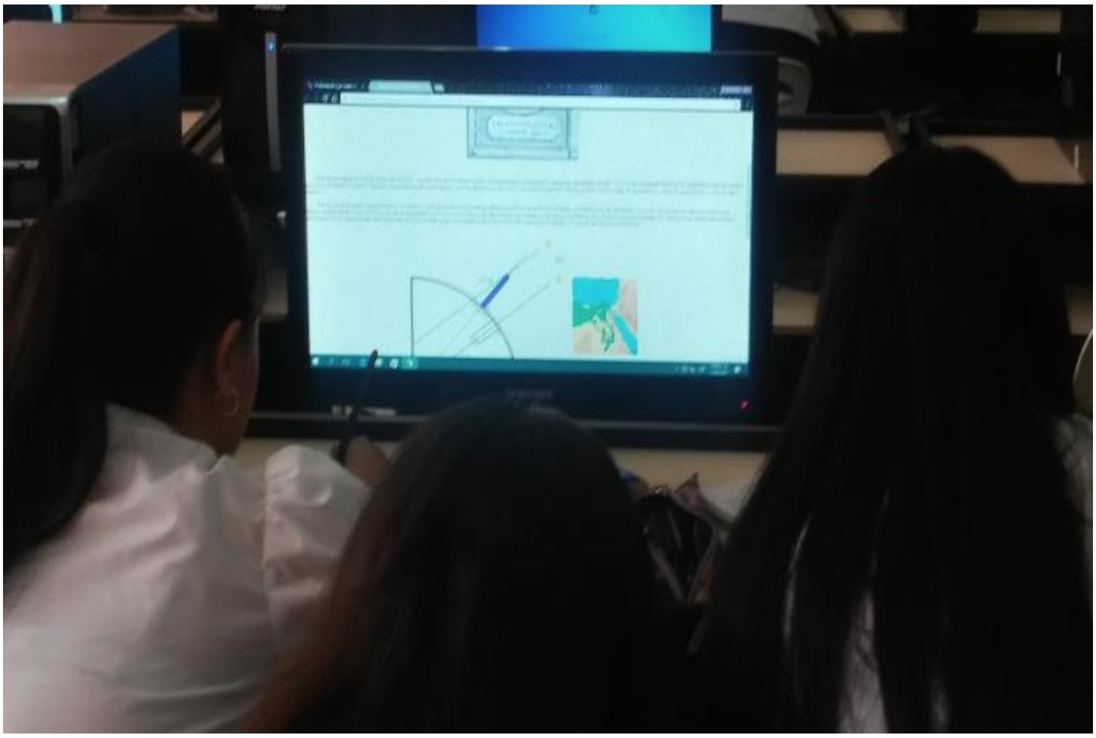
Después de realizar la primera actividad de apertura se realizó una segunda actividad donde los estudiantes indagaron en internet en buscadores como Google de forma libre sobre la civilización griega y en especial en personajes como Tales de Mileto, Eratóstenes de Cirene, y Hiparco de Nicea.

El objetivo de esta actividad es reconocer los hallazgos que algunos matemáticos griegos tuvieron en la historia. La metodología a desarrollar, consistió en la búsqueda de la información finalizando con un foro en el cual los estudiantes después de realizar la consulta, pudiesen contar los hallazgos de los personajes anteriormente mencionados por medio de participación en el aula de forma oral.

El tiempo empleado fue dos horas una para la indagación y otra para el foro.

A continuación en la figura 39 se evidencia el proceso de búsqueda por parte de los estudiantes para el desarrollo de esta actividad.

Figura 39. Estudiantes de la institución educativa en búsqueda de información de Tales de Mileto, Eratóstenes de Cirene, y Hiparco de Nicea.



3.2.3 Presentación de la fase 2.

La actividad de desarrollo fue considerada como la consolidación del conocimiento previo y el conocimiento adquirido después de finalizar la fase 1. Es por ello que para la realización de esta fase 2, su pudo ampliar, profundizar y complementar en los estudiantes aquellos conocimientos matemáticos, geométricos e históricos que conocían o descocían de los grados escolares anteriores.

La actividad realizada en esta segunda fase, lleva el título de ¿Cómo medir el radio de la tierra?, donde el estudiante podrá medir, calcular e interactuar con instrumentos de medición, a partir de unas instrucciones dadas por el maestro; cuyo objetivo principal es recrear el problema de Eratóstenes usando objetos matemáticos.

De esta forma, se espera que los estudiantes lleven a cabo la actividad teniendo en cuenta desempeños, como por ejemplo: resolver y formular problemas usando modelos geométricos, propiedades de semejanza y congruencia, que los dirija hacia la interacción de teoremas básicos como los de Pitágoras y Tales. Se le deja claro al lector que estos desempeños se encuentran establecidos en los Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas MEN (2006) y en los Derechos Básicos de Aprendizaje MEN (2016).

Aparte de los desempeños que debe tener el estudiante para la realización de la actividad de desarrollo, se pone en manifiesto el termino denominado *Anticipación,* planteado por Montiel (2005) ya no como un desempeño en específico como lo plantea el los Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas MEN (2006) sino como el momento donde el estudiante debe analizar la matematización de los fenómenos naturales como el paso entre la interpretación del cosmos y/o fenómenos astronómicos a la construcción de conceptos como la heliocentricidad del sistema solar, la proporción y relación, el conocer que las orbitas no son circulares sino elípticas, así como el dimensionar el tamaño de los planetas conocidos.

Es por ello que Montiel (2005) afirma que cuando se recrea el momento de la anticipación, este se manifiesta como aquel discurso matemático escolar que debe reconciliar el estudio de la trigonometría con el estudio de la proporcionalidad, donde objetos como el triángulo el circulo, el ángulo y las relaciones entre ellos son herramientas en la construcción de modelos geométricos.

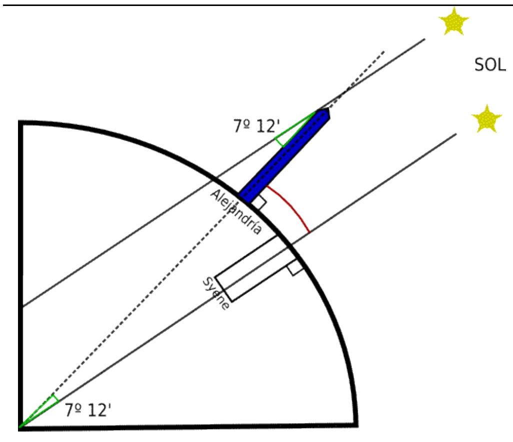
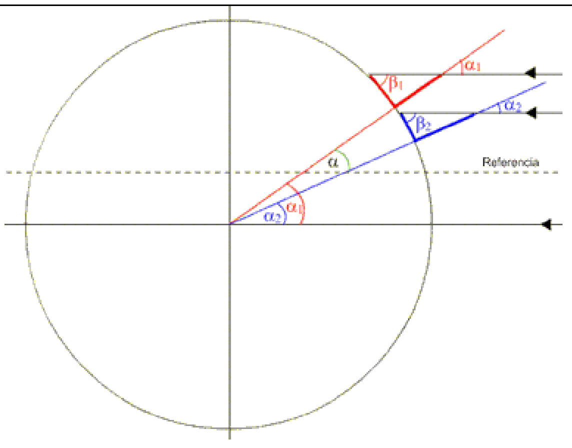
Por otra parte, esta actividad es adaptada e implementada a partir de algunos elementos de la historia de la matemáticas extraídos de los textos de Collete (1985), Kline (1972)y Mateus (2013) para los trabajos realizados por Eratóstenes de Cirene, donde uno de sus hallazgos, consistió en obtener el cálculo aproximado del radio de la tierra haciendo uso de conceptos geométricos extraídos de matemáticos griegos como Tales de Mileto basados en la utilización del gnomon para calcular alturas.

Eratóstenes en su trabajo, utilizó el gnomon para observar la sombra que se generaba el 21 de junio a las 12 del mediodía en la ciudad de Alejandría y luego esta ser comparada con la sombra que proyectaba en gnomon en Siena, donde a la misma hora un 21 de junio no generaba ningún tipo de sombras.

Por consiguiente, para la adaptación se tuvo en consideración estas apreciaciones realizadas por Eratóstenes, salvo que la fecha a fue el 13 de enero de 2017 y los lugares utilizados fueron Palmira y Ciudad de Panamá entre las 11 am y la 1 pm. Es de suma importancia mencionar que dentro de la adaptación en los dos lugares mencionados anteriormente el sol generaba sombras a esta hora del día.

A continuación en la siguiente tabla se muestra un esquema de los rayos del sol proyectados en un poso Siena y un gnomon en Alejandría y el ajuste realizado para los ángulos formados por los rayos del sol en Ciudad de Panamá y Palmira.

Tabla 5. Relación entre el cálculo realizado por Eratóstenes y el ajuste realizado para la experiencia.

Paralelo entre los ángulos de Alejandra- Siena y Palmira- Ciudad de Panamá	
	
Sombras proyectadas por los rayos sol el 21 junio entre Alejandría y Siena en el modelo de Eratóstenes. Fuente: http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/practica/eratostenes.htm	Ajuste para el cálculo del radio de la tierra teniendo en cuenta los ángulos generados por Palmira y Ciudad de Panamá. Fuente:http://blogfisicadejaviyjaime.blogspot.com.co/2015/11/eratostenes-medida-de-la-circunferencia.html

A partir de lo mencionado con anterioridad, la metodología utilizada para realizar la actividad el estudiante debe resolver un taller haciendo uso de conceptos como: ángulos entre paralelas cortadas por una transversal, áreas y perímetro de una circunferencia, ángulos en grados y en radianes, el concepto de razón y proporción, el concepto de semejanza y congruencia, en particular. Todo esto alrededor de implementar una experiencia, en donde el estudiante pueda relacionar los objetos matemáticos e históricos con su entorno.

El tiempo de duración para esta actividad fue de 2 horas.

Adaptación de la actividad

Con la intención de articular los referentes matemáticos, teóricos e históricos desarrollados anteriormente, se plantea la siguiente actividad que tiene por objetivo recrear el problema de Eratóstenes usando objetos matemáticos que busca movilizar en estudiantes de grados décimo elementos conceptuales de tipo geométrico, métrico entre otros. En general, en el siguiente título se muestra como a los estudiantes se les presentó la actividad que tiene como título:

¿CÓMO MEDIR EL RADIO DE LA TIERRA?

Fundamento histórico:

LÉELE CON ATENCIÓN, LA SIGUIENTE DESCRIPCIÓN.

Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.), uno de los primeros en calcular las dimensiones de la tierra, reconocido por la precisión en sus mediciones y por el alto grado de observación.

*Una de esas mediciones lo realizo en su instancia en Siena una ciudad situada al sur de Alejandría, observo que el 21 de Junio (día más largo que la noche puesto que comienza el solsticio de verano para los habitantes del hemisferio norte). Al medio día justo cuando el sol se encontraba en el Zenit (**Situación del Sol en el punto más alto de su elevación sobre el horizonte**) los objetos en general no producían sombras y solo se proyectaban directamente en un pozo profundo lo que quiere decir que los rayos de sol caían completamente perpendiculares al piso.*

Eratóstenes observo que el mismo 21 de junio de un año diferente en su estancia en Alejandría como bibliotecario, no paso lo mismo, es decir, al medio día en esta ciudad los objetos si producían sombras por lo que se podría decir que el sol no se encontraba en el Zenit.

La explicación que dio Eratóstenes a esta diferencia solo podía ser explicada si la tierra no era plana asumiendo así que Siena y Alejandría se encuentran en el mismo meridiano es decir en la misma longitud geográfica al igual que los rayos del sol caen sobre la tierra de forma paralela. Entonces, una tierra con superficie curva podría explicar este fenómeno. En la Figura 1se muestra la observación registrada por Eratóstenes en Siena y Alejandría el 21 de junio

Dado lo anterior Eratóstenes se dispuso a crear un modelo geométrico, donde simula extender los rayos de sol hasta el centro de las tierra, los cuales caen paralelamente sobre Siena al medio día, ya que para ese entonces se asume que la tierra es esférica y a su vez los mismos rayos de sol que caen paralelamente en Alejandría, para esto dispuso un gnomon en Alejandría que formaba un ángulo de 7.12° como se observa en la Figura 1.

Después Eratóstenes, proyecto el gnomon hasta el centro de la tierra y con ayuda de las propiedades geométricas de la igualdad de ángulos que se forman cuando una recta corta rectas paralelas determino el ángulo formado en el centro de la tierra. Por tanto el ángulo que subtiende un arco de longitud Alejandría hasta Siena, muestra una relación de proporcionalidad con la amplitud del ángulo de 360° que subtiende la longitud de la circunferencia.

Eratóstenes para terminar el cálculo necesitaba medir la distancia lineal de Siena a Alejandría para ello contrato un grupo de soldados que hicieron la medida en términos de estadios obteniendo una distancia de 5000 estadios entre las dos ciudades cabe resaltar que un estadio equivale a 185m. Ahora que Eratóstenes ya tenía la relación entre 7,2° y 360°, la distancia entre Siena y Alejandría ya procedió a realizar proporción para hallar el tan anhelado radio de la tierra.

Referentes Bibliográficos: [1] Kline, Morris (1994). El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días, Oxford University: Alianza.

[2] Collette, J. (1990). Historia de las matemáticas. Siglo XXI editores. España.

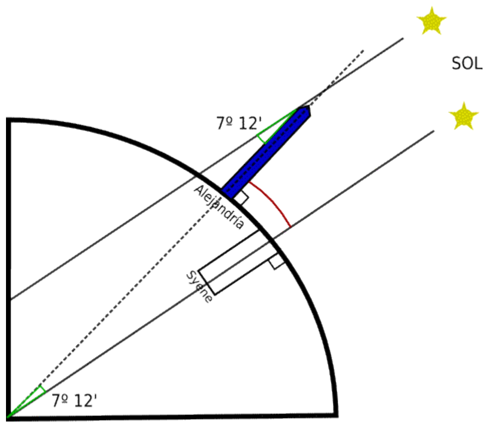


Figura 1. Sombras proyectadas por los rayos sol el 21 junio entre Alejandría Siena. Fuente http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/practica/eratostenes.htm

Después de leer la contextualización histórica de Eratóstenes, de manera grupal usa los materiales que aparecen a continuación para tomar unas medidas similares a las descritas en la lectura anterior, salvo que para este momento no se tendrá en cuenta la cuidad de Alejandría y Siena, si no en el municipio de Palmira y Ciudad de Panamá, Capital de la república de Panamá.

Materiales:

- **Gnomon:** barra posicionada de forma vertical y perpendicular sobre la superficie que servirá para proyectar la sombra, como se muestra en la figura 2.

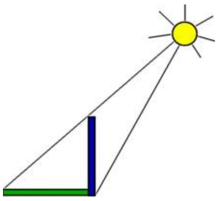


Figura 2. Ejemplo de un Gnomon. Tomado de: https://chorasimilarity.wordpress.com/2012/10/19/right-angles-everywhere-ii-about-the-gnomon/

- **Cinta métrica:** Servirá para realizar la medida de la sombra proyectada sobre el suelo.
- **Papel Kraft**: Para marcar las observaciones realizadas
- **Marcadores:** para registrar las marcas sobre el papel
- **Regla**
- **Reloj**
- **Brújula**
- **Google maps:** Aplicación utilizada para calcular la distancia entre las ciudades.

Procedimiento:

Ahora vamos a realizar el siguiente procedimiento en compañía del profesor, a partir de las instrucciones verbales sobre el uso del Gnomon, para ellos cada grupo debe:

1. Ubicar el papel kraft en una superficie horizontal.
2. Ubicar el gnomon, para este caso se utilizará un recogedor o un palo que proyecte sombras sobre el papel kraft.
3. Tomar la medida de la sombra proyectada por el gnomon.
4. Registrar las medidas de la sombre la tabla 1, que aparece al final.
5. Realizar los cálculos necesarios para encontrar el radio de la tierra, que se mencionaran en el transcurso de la actividad.
6. Colocar el gnomon de forma perpendicular sobre una superficie horizontal, previamente ubicada.
7. Con ayuda de la cinta métrica medir la sombra generada por el gnomon
8. Realizar el procedimiento en intervalos de 5 minutos por 30 minutos. Y argumentar en el respaldo de tu hoja de respuesta ¿Qué observan?
9. ¿Cuál es el recorrido que tiene la sombra en términos de punto cardinal?
10. ¿La sombra siempre es del mismo tamaño a medida que transcurre el tiempo?
11. Con ayuda de Google Maps calcula la distancia de Palmira a Ciudad de Panamá. Pide a tu tutor que te regale la información de la sombra registrada en esta ciudad y la hora en que se realizó.
12. ¿Cómo calcularías los ángulos $\alpha 1 \ y \ \alpha 2$ de la siguiente *figura 2*?

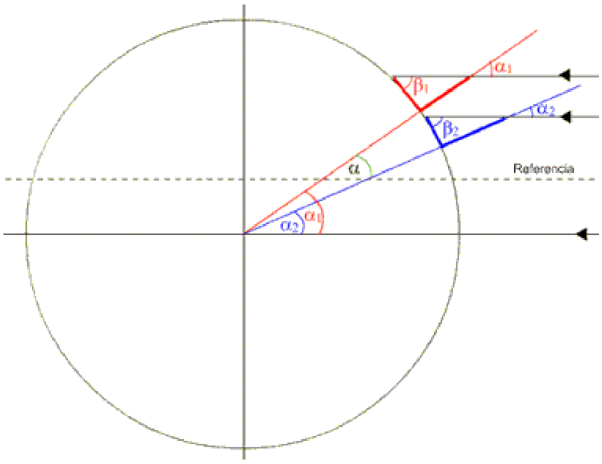


Figura 2. Gráfico para el cálculo del radio de la tierra teniendo en cuenta los ángulos generados por Palmira y Ciudad Panamá

13. Sigue las instrucciones del tutor para realizar los cálculos correspondientes.

    Sea α= $\alpha 1 - \alpha 2$

    Ahora escribe la razón entre la sombra del gnomon y la medida del gnomon de la siguiente forma: $\frac{sombra\ del\ gnomon}{medida\ del\ gnomon}$ para el municipio de Palmira y Ciudad de Panamá.

    Por conceptos previos de geometría se tiene que 2πr es el perímetro de la tierra.

    $$2\pi r = perímetro\ de\ la\ tierra$$

    De lo anterior se puede obtener la siguiente razón

    $$\frac{\alpha}{(\boldsymbol{D})} = \frac{360°}{2\pi r}$$

    Dado lo anterior al despejar r se obtiene que

    $$r = \frac{360° \cdot (\boldsymbol{D})}{2\pi\alpha}$$

    <u>Nota: Recuerda</u> $(\boldsymbol{D})$ ***<u>que es la distancia que encontraste entre Palmira y Ciudad de Panamá</u>***

    Por último, reemplaza los datos encontrados para $D\ y\ \alpha$ y escribe el radio de la tierra que hallaste de forma experimental.

14. ¿Qué te deja la experiencia de aula?

Nota: La actividad se realizará con la ayuda de una persona que medirá en el mismo momento la sombra proyectada en Panamá, lo cual se necesitará tener en cuenta que en ambos lugares a determinada hora del día el sol proyectará una sombra sobre el gnomon.

Fecha	Hora AM-PM	Medida Gnomon cm	Sombra Proyectada m
01 de enero del 2017	00:00 am	1.0	1.0

Tabla 1. Registro de medidas de las sombras proyectadas

Descripción de la aplicación ¿Cómo medir el radio de la tierra?

Los estudiantes realizaron la lectura inicial y a petición del docente se les solicito que algunos estudiantes explicaran en una escala pequeña lo que se iba a realizar, de esta manera el docente se percataba sobre la lectura realizada y las investigaciones previas.

Siendo las 11:45 am todos se ubicaron en la cancha de baloncesto de la institución educativa, con los materiales y respectivo el montaje para hacer la toma de las sombras proyectadas por el sol sobre el gnomon, en este mismo instante una persona se encontraba en

Ciudad de Panamá ya realizaba algunos cálculos de sombras que se enviaban de forma virtual al docente que dirigía la actividad y de esta manera realizaba el anuncio de la hora y la medida de la sombra en ese lugar. Un ejemplo de ese primer momento se evidencia en la siguiente figura.

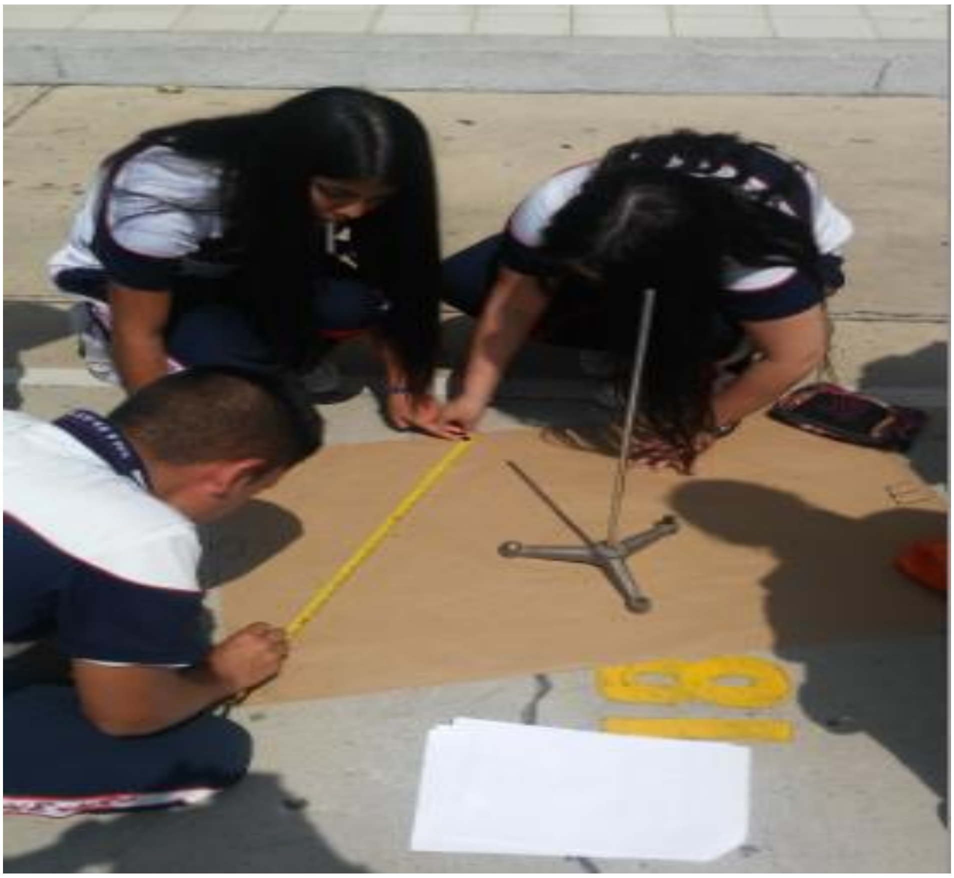
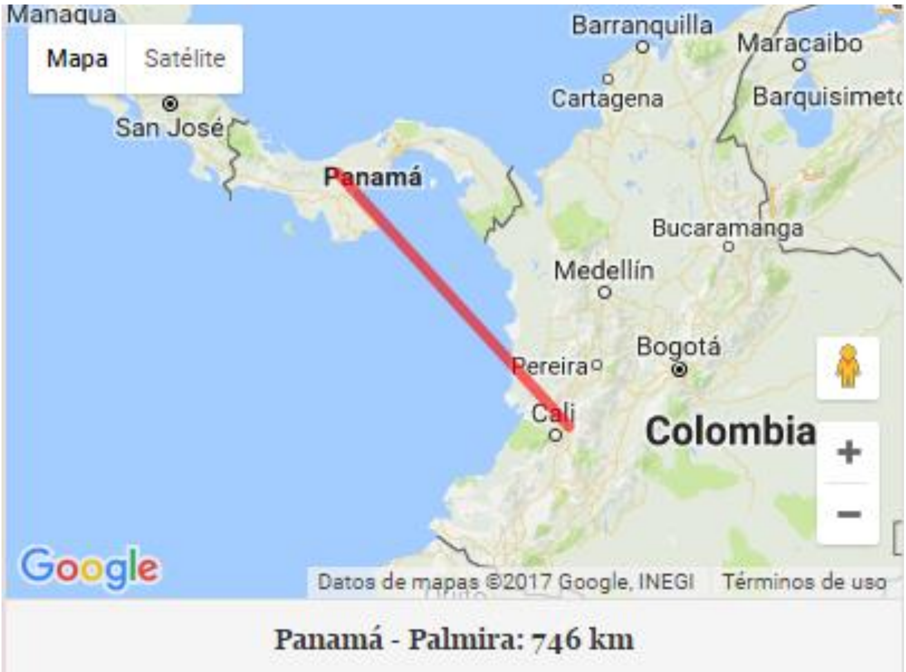


Figura 40. Estudiantes realizando medidas de sombras en la institución educativa.

Luego de tomar las medidas de las sombras y almacenar esos datos en la tabla 1 la cual se encuentra en la actividad; se disponen a buscar la distancia que hay desde Palmira hasta Ciudad de Panamá en línea recta, para ese momento a los estudiantes se les genero diversas dificultades ya que en los buscadores que tenían de manera individual les aparecía distancias, muy alejadas de la real, por lo tanto, el profesor y un estudiante realizaron la intervención adecuada para llegar al resultado final, como se muestra en la figura 41.

Figura 40. Distancia desde la institución educativa hasta ciudad de panamá.



Fuente: http://www.distancia.co/Panam%C3%A1/palmira

Luego de tener las medidas, la idea fue calcular los ángulos que se generaron en las dos ciudades teniendo en cuenta que no conocen las razones trigonométricas, para ello a los estudiantes se les dio vía libre para poder hacer el cálculo y que mostraran la forma de encontrar esta medida.

Al final, la decisión tomada por los estudiantes fue dibujar un triángulo con las medidas adquiridas y con ayuda del transportador hacer la medición, cabe resaltar que la propuesta surgió de los estudiantes más no del maestro. A continuación en la siguiente figura se muestra ese procedimiento.

Figura 41. Estudiantes realizando la medida de los ángulos en las dos ciudades.

Dado que ya conocían los ángulos entre las dos ciudades siguieron con los pasos mencionados en la guía hasta llegar a la medida del radio de la tierra.

3.2.4 Presentación de la fase 3.

La actividad de cierre es la encargada de sintetizar los nuevos conocimientos adquiridos, durante las fases anteriores.

Diseño de la actividad

Se llevó a cabo la siguiente actividad con el objetivo es reconocer las razones trigonométricas seno y coseno a partir de una experiencia de aula.

La metodología consistió en la conexión entre la experiencia anteriormente realizada en conjunto con las dificultades que se les presentó dentro de la actividad de desarrollo a los estudiantes; de esta forma, dar solución a las inquietudes planteadas por medio de la presentación de las razones trigonométricas seno y coseno. Igualmente, en esta actividad de cierre se hizo la socialización y construcción del objetivo de reconocer las razones trigonométricas seno y coseno a partir de las experiencias realizadas en la fase 1 y 2

El tiempo estimado para esta actividad fue de 45 minutos.

Descripción de la aplicación

La conexión entre las diferentes fases es importante para llegar al desarrollo del objetivo general del trabajo de grado que busca favorecer el aprendizaje de las razones seno y coseno por medio de una experiencia en el aula que involucre algunos de los elementos del desarrollo histórico de las razones trigonométricas, por esta razón una vez finalizada la fase 2, se les pidió a los estudiantes que calculen el error porcentual del radio de la tierra, dado el valor experimental hallado en la fase 2 y el valor real que es el que se conoce actualmente como 6371 Km, por medio de la siguiente formula

$$error\ porcentual\ = \frac{|valor\ teórico - valor\ experimental|}{valor\ teórico} \cdot 100$$

A partir de este, se indagó sobre las dificultades presentadas en la actividad, que de forma general para los participantes de la actividad fue el cálculo de los ángulos sin necesidad de usar transportador, puesto que ellos predicen que el error se tiene cuando calculan los ángulos de las sombras en Palmira y Ciudad de Panamá.

Por consiguiente, se les solicitó los cálculos realizados en la fase 2 que se basaba en medida de sombras y la altura de un gnomon, después por parte de los docentes a cargo se les mostró que esas sombras al igual que las alturas se podrían relacionar con lados de triángulo rectángulo ya que el gnomon así mismo como la sombra forman una perpendicular.

De esta manera, la relación que hay entre la sombra, la altura del gnomon, la diagonal y el ángulo que se forma entre ellas corresponde a un concepto llamado razones trigonométricas seno y coseno respectivamente; por la utilidad que tienen en la solución de este tipo de problemas para minimizar el error y caracterizar la importancia de este concepto. Es por ello, que los estudiantes proceden a calcular nuevamente los ángulos presentados en la pregunta 12 de la actividad de desarrollo titulada ¿Cómo medir el radio de la tierra?

12. Cómo calcularías los ángulos $\alpha 1\ y\ \alpha 2$ de la siguiente figura 2?

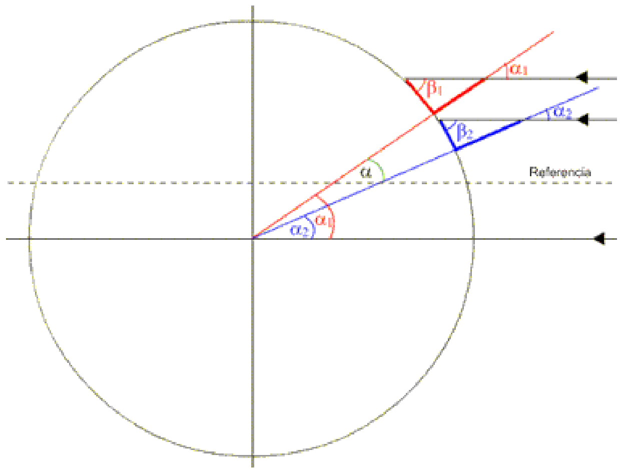


Figura 2. Grafico para el cálculo del radio de la tierra teniendo en cuenta los ángulos generados por Palmira y Ciudad Panamá

Pero para este, ya no hicieron los cálculos de manera intuitiva, sino que lo hicieron con el nuevo concepto introducido las razones trigonométricas de los ángulos $\alpha 1$ y $\alpha 2$; para ese momento realizaron nuevamente cálculos que se proceden de la pregunta 12 hasta llegar nuevamente al resultado del error porcentual encontrando así, una disminución en dicho error y una aproximación al valor real del radio de la tierra.

3.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y REFLEXIONES.

En esta sección, se presenta el respectivo análisis constituido por las interpretaciones de todos los estudiantes para la fase 1 y la de los dos grupos de estudiantes para las fase 2 y 3, en relación con el concepto matemático, su desarrollo histórico, los apartados curriculares como los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (MEN, 2006), los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA 2016). Así mismo, lo expuesto en Montiel (2013) y (2005) para determinar en qué estado de conocimiento se encuentra el estudiante por medio de las respuestas que se reflejaron de cada una de las actividades y estas ser clasificadas en anticipación y predicción.

3.3.1. Análisis fase 1.

Actividad de Apertura 1.

La metodología utilizada permitió que durante el desarrollo de la fase 1 los estudiantes, de manera general reflejaran una buena actitud, pues hubo participación por parte del grupo de trabajo de las cuales se dieron diversas conclusiones dentro del aula entre las que se encuentran:

- Solo reconocen a Pitágoras como personaje histórico de las matemáticas
- Hay diversos personajes que han aportado al desarrollo de las matemáticas.
- La geometría ha sido importante en la historia por los aportes a la humanidad

Después de realizar la primera actividad de la fase 1, en la siguiente tabla de contingencia, se manifiesta la cantidad de personas que responden o no a cada una de las preguntas planteadas en la actividad 1.

Tabla 6. Tabla de contingencia para resaltar la cantidad de estudiantes que respondieron a cada una de las preguntas planteadas.

Reconoce / Preguntas actividad 1	SI	No	% de respuestas satisfactorias	% de respuestas no satisfactorias
1	20	8	71,4	28,6
2	20	8	71,4	28,6
3	28	0	100	0
4	28	0	100	0
5	27	1	96,4	0,6
6	13	15	46,4	53,6
7	24	4	85,7	14,3
8	13	15	46,4	53,6

En relación con la tabla anterior, la cual busca identificar la cantidad de estudiantes que se aproximan a los conceptos planteados y los que están fallando en la actividad de apertura 1, se catalogó con aciertos **SI** y **NO**. El **SI** cuando el estudiante realiza el ejercicio de forma correcta y **NO** cuando el estudiante no realiza de forma correcta el ejercicio esto con la intención de llegar al paralelo entre las fortalezas y debilidades, sobre cada uno de los conceptos planteados en la actividad de apertura 1 como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 7. Fortalezas y debilidades encontradas de forma general al realizar la aplicación de actividad.

FORTALEZAS	**DEBILIDADES**
• Área y perímetro de una circunferencia. • Rectas paralelas cortadas por una trasversal • Teorema de Pitágoras. • Conversión de ángulos de grados a radianes	• Teorema de Tales • Definición de razón y proporción. • Reconocer el diámetro en una circunferencia. • Simbología de congruencia.

Debido a esto, con base en los estándares básicos en competencias y los derechos básicos de aprendizaje, se pudo corroborar el porqué de esos resultados de cada pregunta como se muestra a continuación:

Las preguntas 1 y 2.

1. ¿Cuál es la fórmula para calcular el área y el perímetro de una circunferencia?

2. Dado lo anterior calcule el área y el perímetro para una circunferencia con las siguientes características:

a. Si el radio mide 10 cm

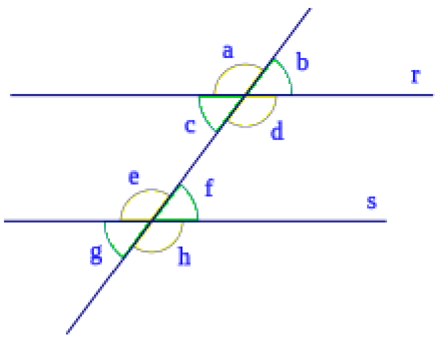
b. Si el diámetro mide 25 dm

Estas preguntas tienen una estrecha relación al referirse al mismo concepto, donde el 71.4% de los estudiantes que realizaron la actividad contestaron de manera satisfactoria. Según los Derechos Básicos de Aprendizaje MEN (2016) el estudiante debe "Explicar las relaciones entre el perímetro y el área de diferentes figuras (variaciones en el perímetro no implican variaciones en el área y viceversa) a partir de mediciones, superposición de figuras, cálculo, entre otras" (p. 39). "Propone y desarrolla estrategias de estimación, medición y cálculo de diferentes cantidades (ángulos, longitudes, áreas, volúmenes, etc.) para resolver problemas". (p. 47).

Estos saberes que presentan los Derechos Básicos de Aprendizaje se encuentran en la sección de quinto y sexto de primaria respectivamente, implicando así que para el grado décimo el estudiante de manera anticipada, ya aplica con los conocimientos adquiridos. Ahora, las debilidades se presentaron en el 28.6% de los estudiantes puesto que no están alcanzando las metas significativas que proponen los Lineamientos Curriculares MEN (1998), donde el estudiante debe desarrollar habilidades matemáticas las cuales le permitan "la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos a través de la traducción entre las distintas formas de representación" (p. 76)

Preguntas 3.

3. En la siguiente figura reconoce usted que ángulos son congruentes.



El 100% estudiantes contestaron de forma satisfactoria a esta pregunta, reconocen el estándar manifestado por el MEN (2006) “Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales” (p.84). Este estándar se puede encontrar en la sección de sexto a séptimo, dando como resultado que el total de la población, aún conservan los conocimientos adquirido en los anteriores grados de escolaridad.

Es importante resaltar, que la congruencia de ángulos es un concepto importante para el desarrollo de la actividad inmersa en la fase 2.

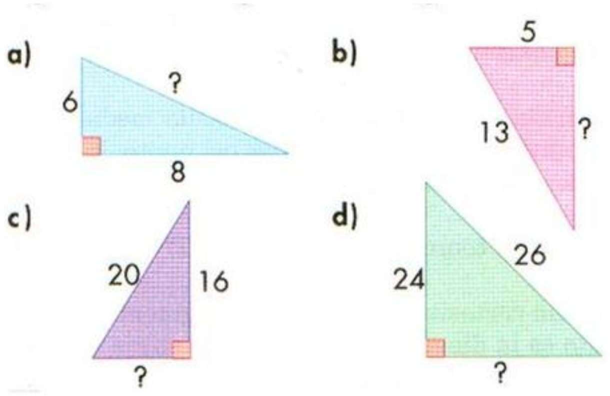
Preguntas de la 4 a la 8.

Estas preguntas, se encuentran relacionadas al referirse al mismo al mismo estándar y por consiguiente al mismo Derecho Básico de Aprendizaje MEN (2016), el cual platea que el estudiante debe: “Reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales)” (p. 86), para la sección de octavo a noveno y “Utilizar teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes” (p. 68) ubicado en la sección de grado noveno. Respectivamente.

Preguntas 4 y 5.

4. Enuncie el Teorema de Pitágoras

5. Encuentre la medida que falta de los siguientes triángulos



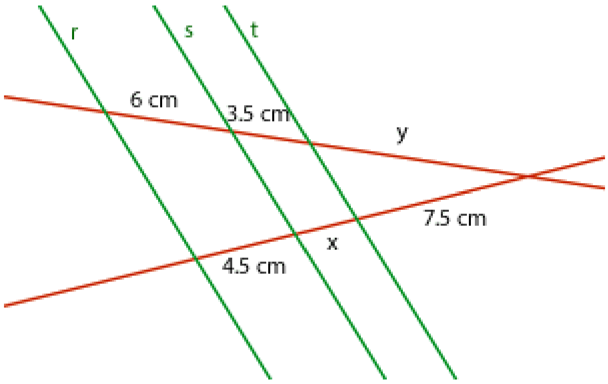
Las preguntas 4 y 5 están inmersas en el mismo concepto. Para la cuarta pregunta el 100 % de los estudiante respondieron de forma satisfactoria, pero para la quinta pregunta el 0,6% corresponde a 1 estudiante que no realizo la pregunta.

Este es un resultado interesante al evidenciar que la gran mayoría de los estudiantes aplican el teorema de Pitágoras para calcular la medida de cualquier lado de un triángulo rectángulo, sin importar que muchos de ellos no lo enunciaron de forma natural pero si de forma matemática, lo cual para los docentes a cargo fue un resultado afirmativo al notar que, también resolvieron con la misma agilidad la pregunta cinco.

Este resultado los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) lo clasifican como la capacidad de "Identificar regularidades y argumentar propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales" (p. 62)

Preguntas 6 y 8.

6. Calcular el valor de x e y para la siguiente figura



8 ¿Qué es razón y proporción?

El resultado de las preguntas 6 y 8, era de esperarse ya que ambas preguntas hablan del término razón y proporción, es por ello que el 46,4% de los estudiantes respondieron a ella de manera afirmativa. Para los Derechos Básicos de Aprendizaje MEN (2016) el "Reconocer situaciones en las que dos cantidades covarían y cuantifica el efecto que los cambios en una de ellas tienen en los cambios de la otra y a partir de este comportamiento determina la razón entre ellas" (p.30) al igual que "interpretar las fracciones como razón, relación parte todo, cociente y operador en diferentes contextos" (p.30) este saber hace parte del aprendizaje que se debería evidenciar para el grado de cuarto de primaria, implicando así que estos son conceptos que el estudiante utiliza de manera anticipada.

El 53,6% de los estudiantes, que respondieron de manera no satisfactoria a estas preguntas es porque no involucran una serie de acciones las cuales Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), lo representan como la capacidad de identificación de propiedades, reconocimiento de condiciones y verificación de resultados de un proceso.

Pregunta 7

7. Pasar los ángulos 30°, 45° y 135° a radianes.

Para la pregunta 7 no hay un estándar o un derecho básico de aprendizaje que se encuentre de forma explícita como para las otras preguntas; pero en los Estándares Básicos de Aprendizaje MEN (2006) para los grados de décimo y undécimo manifiesta algo similar o en relación donde el estudiante debe hacer "Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias" (p.88). La solución esta pregunta hace parte de los contenidos inmersos en conceptos geométricos y cálculos algebraicos y para ello el 85.7% de los estudiantes respondieron de manera afirmativa, donde esto responde a que los estudiantes, construyen expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica.

En general más del 77% de los estudiantes respondieron de manera satisfactoria a la actividad de apertura 1, lo que indica que la mayoría de los estudiantes de grado decimo reconocen algunos de los saberes presentados por los Derechos Básicos de Aprendizaje MEN, (2016) los cuales permiten desarrollar actividades en el aula de manera autónoma, alcanzando así un ideal por parte de los docentes la cual se basa en mejorar sus desempeños matemáticos.

Actividad de apertura 2

Para la segunda actividad de apertura, los resultados ya no se clasificaron como fortalezas y debilidades ya que el objetivo de ella, se centró en que los estudiantes conocieran sobre otros matemáticos aparte de Pitágoras ya que al parecer era al único que conocían, como beneficio para el desarrollo de la segunda fase y de esta forma no desconocieran al personaje principal del cual se iba a centrar la experiencia.

3.3.2. Análisis fase 2.

La adaptación e implementación de esta actividad, logro integrar los conceptos y las nociones estudiadas de la primera fase y aplicarlas en un contexto real, para llegar a la construcción de un nuevo concepto.

A causa de esto, en la segunda fase los estudiantes ya no se encuentran con actividades del estilo de la primera y eso causo una actitud activa para responder a ella, se le deja claro al lector que esta actividad se implementó en las zonas comunes de la institución con la interacción de diversos objetos matemáticos, tecnológicos, al igual que el de sus compañeros. Implicando así, un cambio de espacio o de ambiente para el proceso de enseñanza aprendizaje.

Así sucesivamente, el objetivo de esta primera parte de la implementación *¿Cómo medir el radio de la tierra?* fue identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes al interpretar conceptos históricos y su vez entender como esta se puede relacionar con un contexto real como es el medir el radio de la tierra. Para ese momento, uno de los dos grupos de estudiantes, antes de proceder a realizar la actividad se anticipó a un hecho y fue, el indicar que si la actividad se iba a realizar en la hora de clase era muy importante hacer el paralelo de que probablemente las sombras proyectadas por el sol para Eratóstenes no iban a ser la misma que las para de los estudiantes, por la época del año en la que se encontraban las cuales no eran para la vísperas de un solsticio de verano y a su vez las distancias no iban a ser las mismas. Para este análisis que realizo el estudiante se clasifico como una fortaleza, para el momento de la anticipación en Montiel (2013), puesto que el estudiante sistematizó esta práctica la cual tiene inmersas actividades de tipo astronómico e histórico y los asoció para la predicción o la explicación de un fenómeno, antes de que éste sucediera, es decir sin llevar a cabo la actividad el estudiante se pudo percatar de la ocurrencia de un hecho clave de la actividad.

Es importante resaltar que los estudiantes reconocieron los puntos cardinales con ayuda de la brújula cuando se buscó dar respuesta a la pregunta ¿Cuál es el recorrido que tiene la sombra en términos de punto cardinal?

Por otra parte, los estudiantes en la pregunta ¿Cómo calcularías los ángulos $\alpha 1\ y\ \alpha 2$ de la figura 2? presentada en la actividad de desarrollo como se muestra en la siguiente figura 43. Acudieron a representar un triángulo rectángulo con la altura del gnomon y la sombra proyectada por el mismo, y llegar a cuestionarse sobre la utilización del teorema de Pitágoras para calcular ángulos, en donde la ayuda del docente fue importante para solucionar esas inquietudes y buscar otras maneras para desarrollar esta pregunta, lo que a manera general fue dibujar el triángulo sobre un tablero o sobre el papel y midieron el ángulo con un transportador.

Esta pregunta les dejó una inquietud planteada ¿Cómo hacer para calcular los ángulos sin necesidad del transportador? que en la fase 3 se desarrolló.

12. ¿Cómo calcularías los ángulos $\alpha 1$ y $\alpha 2$ de la siguiente figura 2?

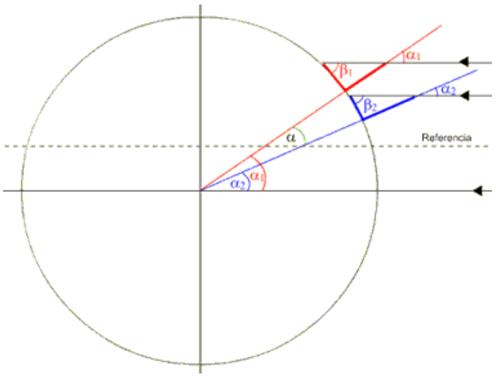


Figura 2. Gráfico para el cálculo del radio de la tierra teniendo en cuenta los ángulos generados por Palmira y Ciudad Panamá

En consecuencia de lo anterior, se puede interpretar que los estudiantes centraron su atención en el desarrollo de nuevas herramientas donde traten con objetos que surgen ya sea de lo abstracto o lo real y toman un carácter matemático, para poder ser interpretado. Este momento se puede interpretar bajo el concepto de predicción planteado por Montiel (2013) y (2005) por la necesidad que tiene el estudiante de conocer el estado futuro con base en el presente, implicando así que el estudiante realiza el paso de la teoría a la construcción de conceptos matemáticos y geométricos por medio de cálculos, geométricos al igual que aritméticos.

En definitiva, esta actividad de desarrollo fue productiva y reflejo una gran aceptación, el público implicado ya que por parte de los docentes se puedo identificar los conceptos que el estudiante aplica, para el cual la mayoría de los estudiantes respondieron a ello, a su vez el estado de la anticipación y la predicción propuesto para esta fase de forma amplia, implicando así la aceptación de las nuevas herramientas de aprendizaje, para los estudiante que manifestaron sentir motivación por llegar a la precisión de los cálculos y el conocer como hallar esas grandes medidas.

3.3.3. Análisis fase 3.

En la actividad de cierre se presenta el momento donde los estudiantes reconocen las razones trigonométricas seno y coseno, de acuerdo a los resultados obtenidos al hallar la medida del radio de la tierra y las diferentes razones calculadas en el punto 13; y posterior a ello el calcular el error porcentual dado por la siguiente fórmula:

$$error\ porcentual\ = \frac{|valor\ teórico - valor\ experimental|}{valor\ teórico} \cdot 100\%$$

Cuando los estudiantes calcularon el error porcentual, llegaron a la conclusión que la medida experimentalmente calculada, generó problemas cuando midieron los ángulos α_1y α_2, por ser estos los elementos principales para calcular el radio de la tierra adicional a esto la manera en que ellos lo realizaron con el uso del transportador no les garantizaba una medición confiable.

Este argumento se generalizó en los comentarios evidenciados en cada grupo, puesto que en los resultados esa fue la pregunta que presentó mayor dificultad, pues la única herramienta que ellos encontraron para calcular estos ángulos, fue hallar la medida de las sombras reflejadas por el gnomon por medio de un transportador, para lo que el resultado final arrojo valores con un error entre el 16% y el 35%.

Después de presentar el nuevo concepto, los estudiantes reconocen que las razones trabajadas en la actividad obedecen a razones trigonométricas porque ellas se pueden aplicar a triángulos rectángulos; de esta manera, al calcular nuevamente los ángulos α_1y α_2, por medio del seno y el coseno respectivamente en uno de los grupos el error disminuyó considerablemente hasta el 4%.

3.4. REFLEXIÓN FINAL

Considerando el análisis realizado en las 3 fases se observó que las experiencias dan cuenta de que al conocer unas situaciones históricas los estudiantes se encaminan a reconocer e indagar los fenómenos de la naturaleza que pueden asociarse de forma más clara a conceptos trigonométricos como las razones seno y coseno. De esta manera, se puede ver una coherencia con los planteamientos de Montiel que afirma:

> El conocimiento trigonométrico que se construye en el *momento de anticipación*, al estar vinculado a la matematización de la astronomía, está considerando una escala de *tiempo finito*, humana y cosmológica a la vez, cuyo periodo depende en definitiva del fenómeno específico (2013, p. 25)

En concordancia con lo expuesto en el trabajo, es importante resaltar a estas posturas como una gran herramienta para identificar todos los momentos en que el estudiante está realizando un construcción trigonométrica; y no es dese el momento que se habla de razones o en su defecto funciones trigonométricas en la escuela, esa construcción empieza desde el momento que el estudiante comienza a cuestionar o reparar su contexto de forma matemática; y tiene sentido cuando esas expresiones se calculan por medio conceptos geométricos hasta que el estudiante asocia o relaciona esas construcciones con objetos trigonométricos.

3.5. CONCLUSIONES

En lo referente al objetivo general se puede concluir que:

Fundamentar el trabajo de grado desde diferentes aspectos históricos, didácticos, curriculares y matemáticos favoreció en cierta medida a la comprensión del concepto de razón trigonométrica. Desde lo curricular, se evidenció la importancia del pensamiento geométrico y sistemas de medidas, que permite usar diferentes conceptos para la construcción de las razones trigonométricas desde tempranos grados de escolaridad. Desde lo didáctico el trabajo de grado favoreció el reconocimiento de los fenómenos asociados a procesos de variación o cambio. Desde lo matemático permitió analizar y la naturaleza del objeto matemático y a su vez valorar la importancia de las razones trigonométricas para este caso en particular. Desde lo histórico el trabajo de grado permitió ampliar el rango de conocimientos sobre como los fenómenos de la naturaleza, en este caso astronómicos aportan a la constitución de los conceptos matemáticos.

En lo referente al segundo objetivo se puede concluir que:

La propuesta metodológica del presente trabajo mostró la importancia de innovar en experiencias en el aula que permitan al estudiante analizar, reflexionar, inferir y conjeturar conceptos matemáticos como los geométricos y trigonométricos, y de esta forma romper con el esquema tradicional de la enseñanza de las razones trigonométricas, por lo que sí es posible trabajar en el aula integrando elementos de tipo histórico alrededor de contextos cotidianos para los estudiantes. De esta forma se puede resaltar el uso de la Historia de la Matemáticas en propuestas educativas y la necesidad de fortalecer profesores en estas competencias.

En lo referente al tercer objetivo se puede concluir que:

Los estudiantes reconocían muy poco sobre matemáticos relevantes en la historia y sus aportes a la ciencia, pero al momento de resolver algún problema donde intervenga el teorema como el de Tales hubo resultados favorables, es decir, hay un manejo de los conceptos desligado de la génesis de los mismos.

Por otra parte, los estudiantes presentaron fortalezas en conceptos geométricos que involucraron conceptos como áreas y perímetros de figuras planas, Teorema de Pitágoras, congruencia de ángulos y conversión de los mismos, lo que facilitó la realización de la experiencia en el aula.

En lo referente al cuarto objetivo se puede concluir que:

La implementación y el análisis de la experiencia en el aula presentada en este trabajo de grado permitió en los estudiantes identificar el concepto denominado como razones trigonométricas seno y coseno, al establecer una relación entre ángulo y número real lo que contribuye a la transición de la magnitud a la medida y posteriormente al número.

Para finalizar es muy importante resaltar que la implementación de este tipo de herramientas didácticas, le permite a los docentes en formación y en ejercicio, modificar el esquema que tradicionalmente se ha usado para enseñar diversos conceptos matemáticos, ya que con estas alternativas se les invita a cambiar sus rutinas convirtiendo así, cualquier experiencia cotidiana, en un nuevo descubrimiento trigonométrico como es el caso de esta experiencia.

Es por ello que la enseñanza de las matemáticas requiere que los docentes planeen y propongan escenarios de aprendizaje significativo y comprensivo para los educandos y así acceder a que ellos participen activamente en la reconstrucción y validación del saber matemático haciendo uso de elementos históricos representativos, los tecnológicos, entre otros, esto con el fin de encontrar estrategias que les permitan hallar soluciones a los problemas que se le planteen dentro y fuera del aula, y así poder profundizar y consolidar los distintos procesos generales como por ejemplo el formular y resolver problemas, comunicar y razonar.

Las actividades planteadas de este modo despierta gran interés por los estudiante ya que se salen de la educación tradicional y les brinda mejor comprensión de los objetos matemáticos trabajados, es importante resaltar que se pueden abordar muchos conceptos en una sola actividad y que se puede realizar no solo en la educación media sino a lo largo de toda escolaridad si se le realiza una buena adaptación.

A lo largo del el recorrido histórico se observó más desarrollo en razones trigonométricas como tangente y cotangente lo que nos lleva a preguntarnos a manera de cierre para un siguiente trabajo de grado o para una continuación

¿Qué actividades educativas se pueden plantear utilizando los hallazgos de la historia para la construcción de teoremas del tangente y cotangente?

Bibliografía

Abarquero, B. P. (2012). *Materiales manipulativos en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas.* valladolid. España: Universidad de Valladolid. España.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA, 8*(1), 30-46.

Apostol, T. (1984). *Calculus* (2 ed., Vol. 1). España: Reverté, S. A.

Arbeláez, Arce, Guacaneme, & Sánchez. (1999). *Análisis De Textos Escolares De Matemáticas.* . Santiago deCali. Universidad Valle: Programa de formación permanente en educación matemática para la actualización y cualificación de docentes del grado 6º Y 7º.

Arbeláez, Arce, J., Guacaneme, E., & Sánchez, G. (1999). *Análisis de Textos Escolares.* Cali: Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle,.

Batanero, C., Godino, J., & Roa, R. (2002). *Medidas de magnitudes y su didactica para maestros.* Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada: Publicación realizada en el marco del proyecto de investigación y desarrollo del ministerio de Ciencia y Tecnología, .

Batanero, Godino, & Rafael. (2002). *Medida de Magnitudes y su Didáctica para maestros.* Proyecto Edumat-Maestros Director: Juan D. Godino Manual para el Estudiante http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/.

Bond, J. (1921). The Development of Trigonometric Methods down to the Close of the XVth Century. *4*(2), 295-323. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/224250 Accessed: 29-03-2016 01:46 UTC

Bravo, M., González, N., & Paz, A. (2014). *Secuencias didácticas para el aprendizaje de las razones trigonométricas.* Santiago de Cali. Universidad Católica de Manizales: Trabajo de grado para optar al título de Licenciados en Matemática.

Campo, C., & Lasso, L. (2014). *Una secuencia didáctica en el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas: el caso de la función seno.* Santiago de Cali. Universidad del Valle: Trabajo de grado para optar el título de licenciados en matemáticas y física.

Collette, J. (1985). *Historia de las matemáticas.* España.: Siglo XXI editores.

DBA. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje.* Santa fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

DBA. (2017). *Derechos básicos de aprendizaje.* Santa fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Etimología de la palabra trigonometría;. (s.f.). *Diccionario web de etimología (inglés)*. Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa#cite_note-1

Fauvel, J., & Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education.* . North America: Kluwer Academic Publisher.

Garcia, J., Pimienta, J., & Tobòn, S. (2010). *Secuencias didácticas aprendizaje y evaluación de competencias.* México: Pearson Educación.

Godino, J. (s. f). *Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática.* Universidad de Granada.

Godino, J., & Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y Didáctica para maestros.* BSO2002-02452, Colombia: Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas., . *Revista EMA, 3*(7), 251-293. Obtenido de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/GomezP02-2714.PDF.

González, N. (2013). *La epistemologia de las matemáticas y su contribución al aprendizaje significatico en estudiantes de grado sexto.* Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Naturales y Exactas. Manizales,Colombia.: Trabajao de Graco para optar al titulo de: Magister en Enseñanza de las Cienias Exactas y Naturales.

Herrera, J. (2008). Obtenido de https://juanherrera.files.wordpress.com/2008/05/investigacion-cualitativa.pdf

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático desde la antig Kline, El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días.* Oxford University: Alianza.

Martíez, J. (2011). Metodos de la investigación cualitativa. *Silogismos, más que conceptos, Nº 08 (1)*(ISSN 1909-955X).

Mateus, K. (2013). *Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo.* Bogota, D. C: Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Natules. Universidad Nacional de Colombia.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Santafe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas.* Santefe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas.* Santefe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Montalvo, A. (2012). *Historia de la trigonometría y su enseñanza.* Benemérita Uniersidad Autónoma de Puebla, Mexico.: Tesis para obtener el título de: Licenciada en matemáticas .

Montiel. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico.* México, Distrito Federal: Subsecretaría de educación media superior, Argentina # 28 Col. Centro Histórico, Del. Cuauhtémoc. ISBN: 978-607-9362-02-7.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* México, CICATAIPN Unidad Legaría México: Tesis de doctorado no publicada.

Montiel, G. (2007). Anticipación, un nuevo enfoque para la Didáctca de las trigonometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol.20. (México).*

Murillo, J. (s. f). *"Estudio de Casos".* Madrid, España.: Universidad Autonoma de Madrid.

Recalde. (2015). *Lecturas de Historia de las Matemáticas.*

Rico, L. (1998). Concepto del currículum desde la Educación Matemática. *Revista de estudios del currículum, 1*(4), 7-42.

Rubiano, J., & Salazar, F. (2010). *Hipertexto.* Bogota, Colombia.: Santillana S. A.

Runza, G. (2013). *Las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas.* Bogotá, D. C.: Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia.

Salcedo, G. (2012). *Elementos básicos de la trigonometría desde el paso de la razón trigonométrica a la función trigonométrica.* Bogotá, D. C. : Trabajo de tesis para optar al título de magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Universidad Nacional de Colombia.

San Martin, O. (2003). *Una exploración de un proceso de construcción del significado del seno de un ángulo agudo como funcion y como razón.* Mexico. Universisas de la sonora.: Tesis de maestria para obtener el titulo de maestro en ciencas con especialidad en matematicas esducativa.

Sullivan, M. (1997). *Trigonometría y geometría analítica.* . México: Pearson Educación.

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

Universidad del Valle

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico: Lic en Matemáticas y Física

Fecha

Día	Mes	Año
1	6	2017

Código del programa: 3487   Resolución del programa: ________

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

un acercamiento histórico a las razones trigonometricas seno y coseno para la adaptación e implementación de una actividad en el aula.

Se trata de:

Proyecto ☐   Informe Final ☒

Director

Mónica Andrea Aponte Marín. - Angela María Gómez Vela

Nombre del Primer Evaluador

Wilderbrando Miranda

Nombre del Segundo Evaluador

Adriana García M

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Luisa Abonia	1127071	3487	luisa.abonia@correounivalle.edu.co	3136008224
Samir Miranda	1124648	3487	William.miranda@correounivalle.edu.co	3137559470

Evaluación

Aprobado ☒   Meritorio ☐   Laureado ☐
Aprobado con recomendaciones ☐   No Aprobado ☐   Incompleto ☐

*En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ____________ (máximo un mes) **ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐   Primer Evaluador ☐   Segundo Evaluador ☐

*En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente),se da un plazo máximo de ____________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* ____ ____ ____

*En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

Mónica Andrea Aponte M. y [firma]	Wildebrando Miranda	Adriana García M.
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
20 JUN. 2017
Área de Educación Matemática
RECIBIDO

Recomendaciones ☐	Observaciones ☐	Razón de desacuerdo - Alternativas ☐

Si se considera necesario, usar hojas adicionales.

Se destaca la coherencia y rigurosidad del trabajo en sus diferentes capítulos, así como el uso de la Historia de las Matemáticas para la implementación de una intervención en el aula, lo cual es innovador en el campo de la Educación Matemática. Resaltando que la reformulación y la contextualización de problemas propuestos en la Historia de las Matemáticas aportan a la construcción y evolución de los objetos matemáticos para proponer actividades en el aula de clase.

Se acogieron las sugerencias de forma propuestas por los evaluadores con antelación.

Firmas

Mónica Andrea Acosta Parra.	Wildebrando Miranda	Adriano García M.
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador